Die Verfolgungskurve auf der Kugel.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde

der

Hohen Philosophischen Fakultät

der

Vereinigten Friedrichs-Universität Halle-Wittenberg

vorgelegt von

Ernst Roeser
aus Halle a. S.

Halle a. S.
Verlag von Franz Quelle, Bremen.
1909.

Referent: Prof. Dr. A. Gutzmer.

Meiner lieben Mutter!

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41548101_0044

Einführung.

Im Jahre 1732 berichtete Bouguer [1]) über Kurven, deren von einem bestimmten Punkte ab gemessene Länge proportional ist dem Abschnitt, den die Tangenten in den Endpunkten dieses Kurvenstückes auf einer Geraden herausschneiden. Er fand, daß eine solche Kurve leicht zu rektifizieren sei, und daß sie von einem Punkt beschrieben werde, der einen andern auf einer Geraden sich fortbewegenden verfolgt. Die Geschwindigkeiten beider Punkte seien konstant, ihr Verhältnis bestimmt die Art der Kurve. In der Natur findet sich das Problem verwirklicht, wenn ein Schiff von einem andern verfolgt wird. Deshalb nannte Bouguer die entstehende Linie Verfolgungskurve. Er nahm die Bahn des verfolgten Punktes zur y-Achse eines rechtwinkligen Systems, nannte m und n die Geschwindigkeiten und fand als Gleichung:

$$x = \frac{n}{2n+2m} a^{-\frac{m}{n}} y^{\frac{m+n}{n}} - \frac{n}{2n-2m} a^{\frac{n}{m}} y^{\frac{n-m}{n}}.$$

Durch Bouguer angeregt, befaßte sich Maupertuis [2]) mit diesen Kurven und brachte nach wenigen Tagen eine neue Lösung und eine Verallgemeinerung des Problems, indem er annahm, der verfolgte Punkt bewege sich nicht auf einer Geraden, sondern auf einer beliebigen Kurve. Er stellte dafür die Differentialgleichung auf. Wie sich später herausstellte, ist das Problem aber nur für die Gerade vollständig durchführbar.

Fast hundert Jahre später beschäftigte sich Thomas de St. Laurent [3]), der vom Beispiel des seinen Herrn verfolgenden Hundes ausgeht, wieder mit den Kurven. Er fand, daß die Gleichung

---

[1]) Mémoire de Mathématiques et de Physique 1732.

[2]) Daselbst.

[3]) Annales de Mathématiques XIII. 1823.

mit Ausnahme des Falles der gleichen Geschwindigkeiten algebraisch ist. Von ihm und Sturm [1]) rührt die weitere Verallgemeinerung, daß der Hund einen Fluß durchschwimmt, also eine ablenkende Kraft hinzukommt. Da in demselben Bande der Annales de Mathématiques Querret auf Bouguer hinweist, Laurent und Sturm dagegen seine Lösung nicht erwähnen, so scheint sie ihnen nicht bekannt gewesen zu sein.

Etwas früher als diese beiden befaßte sich Prittwitz [2]) mit dem Problem und ungefähr gleichzeitig mit ihnen Lehmus [3]). Dieser stellte die Aufgabe so: Zwei Punkte, der eine auf einer Geraden, der andere auf einer Kurve, laufen gleichzeitig mit konstanten Geschwindigkeiten los. Die Kurve ist so zu bestimmen, daß die Verbindungslinie der Punkte stets Tangente an die Kurve ist.

In neuerer Zeit ist das Verfolgungsproblem noch öfter Gegenstand der mathematischen Betrachtung gewesen. Es seien nur noch erwähnt Cesaro [4]) und Friedrich Gauß [5]). Alle diese beschäftigen sich aber nur mit den ebenen Kurven. Die folgende Arbeit hat dagegen das Ziel, das Problem auf die Kugel zu übertragen. Unter Zugrundelegung von geodätischen Polarkoordinaten ergibt sich eine Riccatische Differentialgleichung, die sich, da ein partikuläres Integral ermittelt werden kann, auf eine Quadratur zurückführen läßt. Die Integration ist allgemein nicht ausführbar, trotzdem läßt sich die Form der entstehenden Kurven feststellen, und zwar hauptsächlich durch Diskussion von $\operatorname{tg}(y' - y)$, das für alle Kurven einen einfachen Ausdruck annimmt. Dabei ist $(y' - y)$ der sphärische Winkel, der entsteht, wenn man den verfolgten und den verfolgenden Punkt durch je einen größten Kreis mit dem Pol verbindet. Wird der Radius unendlich, so ergeben sich die früher gefundenen Gleichungen als ein Spezialfall des neuen Problems.

---

[1]) Annales de Mathématiques XIII. 1823.

[2]) Prittwitz: Untersuchungen von Kurven, die durch ihre Subtangente rektifiziert werden. 1815.

[3]) Lehmus: Journal der Mathem. 1. 1826.

[4]) Nouvelles Annales de Mathématique 1883.

[5]) F. Gauß, Schulprogramm zu Bunzlau: Über Kurven, welche die Eigenschaft haben, daß je zwei Tangenten aus einer gegebenen Geraden eine Strecke ausschneiden, welche zu dem von den Berührungspunkten begrenzten Bogen in einem gegebenen Verhältnis stehen.

§ 1.

Das Koordinatensystem.

Es soll ein dem Polarkoordinatensystem der Ebene analoges System eingeführt werden. Der Pol 0 liege auf der Kugeloberfläche, x sei der sphärische Abstand des betreffenden Punktes von 0, y der Winkel, den x mit einem Anfangsmeridian bildet, beide im Bogenmaß gemessen. x geht also von 0 bis π, y dagegen kann alle Werte annehmen, auch größer werden als 2π. Der Kugelradius sei gleich Eins. Dann lauten die Gleichungen der Kugel

[1]
$$\begin{cases} \xi = \sin x \sin y. \\ \eta = \sin x \cos y. \\ \zeta = \cos x. \end{cases}$$

Die Gaußschen Fundamentalgrößen sind:

$$E = \left[\frac{d\xi}{dx}\right]^2 + \left[\frac{d\eta}{dx}\right]^2 + \left[\frac{d\zeta}{dx}\right]^2 = 1.$$

$$F = \frac{d\xi}{dx}\frac{d\xi}{dy} + \frac{d\eta}{dx}\frac{d\eta}{dy} + \frac{d\zeta}{dx}\frac{d\zeta}{dy} = 0.$$

$$G = \left[\frac{d\xi}{dy}\right]^2 + \left[\frac{d\eta}{dy}\right]^2 + \left[\frac{d\zeta}{dy}\right]^2 = \sin^2 x.$$

Also:

$$\lim_{x=0} \sqrt{G} = 0$$

$$\lim_{x=0} \frac{d\sqrt{G}}{dx} = \lim_{x=0} \cos x = 1.$$

Die Koordinaten bilden also ein geodätisches Polarkoordinatensystem. Das Linienelement einer beliebigen Kurve auf der Fläche lautet dann:

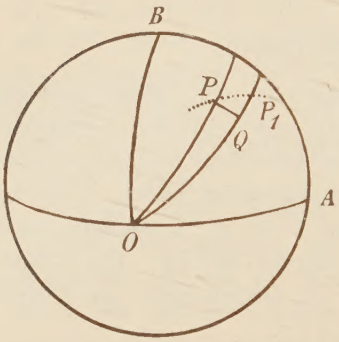
$$ds^2 = dx^2 + \sin^2 x \, dy^2.$$

Und der Winkel μ, den diese Kurve mit einem Meridian bildet, wird bestimmt durch:

[2]
$$\operatorname{tg} \mu = \sin x \frac{dy}{dx}.$$

Dieselben Werte lassen sich auch leicht direkt ableiten.

P und P_1 seien unendlich nahe Punkte der Kurve $y = f(x)$



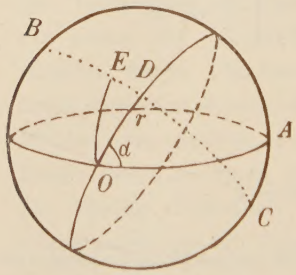
$$\sphericalangle BOP = y$$
$$OP = x$$
$$\sphericalangle BOP_1 = y + dy$$
$$OP_1 = x + dx.$$

Um 0 wird der Kreis mit dem sphärischen Radius OP beschrieben.

$$PQ = dy \sin x$$
$$PP_1 = \sqrt{dx^2 + dy^2 \sin^2 x}$$
$$\operatorname{tg} P_1PQ = \operatorname{tg} \mu = \frac{\sin x \, dy}{dx}.$$

μ ist der Winkel zwischen der Tangente und dem Radius vektor (Meridian) in dem betreffenden Punkte. Dabei ist der Radius von 0 weg, und die Tangente im Sinne der wachsenden x als positiv zu nehmen.

Es soll noch kurz die Gleichung eines größten Kreises aufgestellt werden, da sie später gebraucht werden wird. Von O wird das Lot OD auf BC gefällt. $OD = r$, $DOA = \alpha$. Dann lautet die Gleichung von BC:



$$[3] \qquad \cos(y - \alpha) = \frac{\operatorname{tg} r}{\operatorname{tg} x}.$$

Geht BC durch O, so ist $r = 0$ und folglich:

$$\cos(y - \alpha) = 0$$
$$y = \frac{\pi}{2} + \alpha.$$

Soll der Kreis durch einen festen Punkt $(x_1\ y_1)$ gehen, so wird die Gleichung:

$$[4] \qquad \frac{\cos(y - \alpha)}{\cos(y_1 - \alpha)} = \frac{\operatorname{tg} x_1}{\operatorname{tg} x}.$$

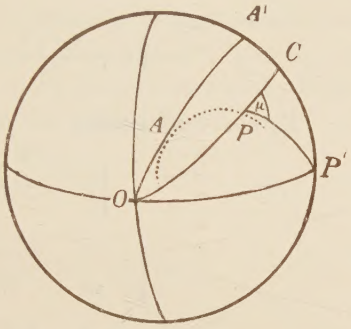
Soll er durch zwei feste Punkte gehen, so erhält man die symmetrische Form:

$$[5] \qquad \operatorname{tg} x \operatorname{tg} x_1 \sin(y_1 - y) + \operatorname{tg} x \operatorname{tg} x_2 \sin(y - y_2) + \operatorname{tg} x_1 \operatorname{tg} x_2 \sin(y_2 - y_1) = 0.$$

§ 2.

Aufstellung der Differentialgleichung.

Jetzt kann zu dem Problem der Verfolgungskurve auf der Kugel übergegangen werden. Der verfolgte Punkt bewege sich auf dem größten Kreise A′P′ im Sinne des Uhrzeigers und habe die Koordinaten $x' = \frac{\pi}{2}$ und y'.



Die Koordinaten des verfolgenden Punktes P seien mit x und y bezeichnet. Die y sollen von demjenigen Kreise an gerechnet werden, der durch O gehend die Kurve tangiert, d. h. für die Anfangslage befindet sich P′ in A′. Nach einer gewissen Zeit ist der verfolgte Punkt in P′ angelangt. P hat inzwischen eine bestimmte Kurve beschrieben. Ich verbinde P und P′ durch den größten Kreis, dann bildet dieser die Tangente an die Kurve. Aus $\triangle$ CPP′ folgt:

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{\operatorname{tg} P'C}{\sin PC}.$$

Und unter Berücksichtigung der Gleichung:

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{dy}{dx} \sin x$$

[1] $$\frac{dy}{dx} \sin x \cos x = \operatorname{tg}(y' - y).$$

Wenn das Geschwindigkeitsverhältnis der beiden Punkte P′ und P mit m bezeichnet wird, ergibt sich zur Elimination von y′ die Gleichung:

[2] $$\frac{dy'}{dx} = m \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \sin^2 x}.$$

Setzen wir $\frac{dy}{dx} = p$, so folgt aus [1] und [2]:

[3] $$2p \cos^2 x + \frac{dp}{dx} \sin x \cos x + p^3 \sin^2 x \cos^2 x$$
$$= m(1 + p^2 \sin^2 x \cos^2 x) \sqrt{1 + p^2 \sin^2 x}.$$

Es wird durch $\cos^2 x$ dividiert und eine neue Unbekannte eingeführt durch die Substitution:

[a] $$1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} = v.$$

Dann wird [3]:

[4] $$2p + 2(v-1)v\frac{du}{dv} + \frac{v-1}{p}p^3 = \left(v + \frac{v-1}{v}p^2\right) m \sqrt{1 + p^2\frac{v-1}{v}}.$$

Ferner wird gesetzt:

[b] $$\sqrt{1 + p^2\frac{v-1}{v}} = p \cdot u$$

$$u = \sqrt{\frac{1}{p^2} + \frac{v-1}{v}}; \quad p^2 = \frac{v}{u^2 v - v + 1}$$

$$\frac{du}{dv} = \frac{1}{2u}\left\{-\frac{2}{p^3}\frac{dp}{dv} + \frac{1}{v^2}\right\} \quad \text{hieraus folgt:}$$

$$2v(v-1)\frac{dp}{dv} = p\left\{\frac{v-1}{u^2 v - v + 1} - \frac{2uv^2(v-1)}{u^2 v - v + 1}\frac{du}{dv}\right\}.$$

Eingesetzt in [4]:

$$p\left(2 + \frac{v-1}{u^2 v - v + 1} - \frac{2uv^2(v-1)}{u^2 v - v + 1}\frac{du}{dv} + \frac{v-1}{u^2 v - v + 1}\right) = m\,p\,u\left(v + \frac{v-1}{u^2 v - v + 1}\right).$$

Gleichung [4] geht also über in:

$$\frac{p \cdot u\left[2uv - 2v^2(v-1)\frac{du}{dv}\right]}{u^2 v^2 - (v-1)^2} = m\,p\,u.$$

Aus der Gleichung [b] ergibt sich, daß $p \cdot u$ niemals null werden kann, daher darf die letzte Gleichung durch diese Größe dividiert werden, und es folgt:

[5] $$2uv - 2v^2(v-1)\frac{du}{dv} = m[u^2 v^2 - (v-1)^2].$$

Dies ist eine Riccatische Differentialgleichung. Bevor sie integriert wird, soll untersucht werden, welche Form sie annimmt, wenn

der verfolgte Punkt sich in Ruhe befindet. In diesem Falle ist $m = 0$. Es muß die Gleichung einer geodätischen Linie (größter Kreis) entstehen.

§ 3.

Untersuchung der Gleichung: $u - v(v-1)\frac{du}{dv} = 0.$

Der Faktor von m in der Riccatischen Differenzialgleichung wird nur unendlich für $u = \infty$, und das tritt für $p = 0$, also $y = x + c$ ein, was im allgemeinen nicht der Fall sein wird. Nimmt also m den Wert Null an, so lautet die Gleichung:

$$[1] \qquad u - v(v-1)\frac{du}{dv} = 0.$$

Sie ist erfüllt für:

$$[2] \qquad u = c\frac{v-1}{v}.$$

Nach Substitution [b] ist daher:

$$cp\frac{v-1}{v} = \sqrt{1 + p^2\frac{v-1}{v}}$$

$$[3] \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sin x\sqrt{c^2\sin^2 x - 1}}.$$

Hieraus folgt

$$c > 1$$

und durch Integration:

$$y = \operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{c^2\sin^2 x - 1}}{\cos x} + C.$$

Wenn man festsetzt, daß für

$$x = \frac{\pi}{2};\quad y = \alpha + \frac{\pi}{2} \quad \text{sein soll, so folgt:}$$

$$[4] \qquad \operatorname{tg}(y - \alpha) = \frac{\sqrt{c^2\sin^2 x - 1}}{\cos x}.$$

Um nun noch c zu bestimmen, wird angenommen, daß für $y = \alpha$, $x = r$ sein soll. Dann ist:

$$c = \frac{1}{\sin r}.$$

Die Umformung obiger Gleichung gibt:

$$[5] \qquad \cos(y - \alpha) = \frac{\operatorname{tg} r}{\operatorname{tg} x}.$$

Diese Gleichung stimmt mit der früher für einen größten Kreis abgeleiteten überein. Für $m = 0$ stellt also die Differentialgleichung eine ∞^2fache Schar von größten Kreisen dar. In welcher Weise sich α verändert, wenn man von einem r zum nächsten übergeht und dabei verlangt, daß die so entstehende Schar von einmal unendlich vielen größten Kreisen eine Verfolgungskurve einhüllt, das muß sich aus der Differentialgleichung ergeben, wenn $m \neq 0$.

§ 4.

Lösung der Riccatischen Differentialgleichung.

Nach § 2 ist:

$$[1] \qquad 2uv - 2v^2(v-1)\frac{du}{dv} = m[u^2v^2 - (v-1)^2].$$

Wenn $u = c\dfrac{v-1}{v}$, so folgt $m = 0$. Dabei durfte c nicht den Wert $+1$ annehmen. Ist aber $c = \pm 1$, so ist die Gleichung auch für $m \neq 0$ erfüllt. Also sind:

$$[2] \qquad u_{1,2} = \pm\frac{v-1}{v}$$

partikuläre Integrale. Um das allgemeine Integral zu finden, setze man:

$$[3] \qquad u = z + \frac{v-1}{v}.$$

Dann wird [1]

$$\frac{1}{z^2}\frac{dz}{dv} + \frac{1}{z}\left\{m - \frac{1}{v(v-1)}\right\} = \frac{m}{2(v-1)}.$$

Wenn die rechte Seite 0 wäre, lautete das Integral:

$$z = \frac{v-1}{c\,v^{m+1}}.$$

Um das Integral der obigen Gleichung zu erhalten, wird c als variabel betrachtet. Es ergibt sich:

$$c = \frac{2C(v^m - 1)}{2v^m}.$$

Also:

$$z = \frac{2(v-1)}{2Cv^m - 1}.$$

Setzt man $2C = c$, so wird das Integral von [1]

$$[4] \qquad u = \frac{v-1}{v}\,\frac{cv^m + 1}{cv^m - 1}.$$

Die partikulären Integrale u_1 und u_2 ergeben sich hieraus für $c = 0$ und $c = \infty$.

In der Tat befriedigt diese Funktion von u die Differentialgleichung 1. Nun war:

$$u = \sqrt{\left[\frac{dx}{dy}\right]^2 + \sin^2 x} = \sqrt{\frac{v-1}{v} + \left(\frac{dv}{dy}\right)^2 \frac{1}{4v^2(v-1)}}.$$

Daraus und aus [4] folgt nach einigen Umformungen:

$$[5] \qquad dy = \pm \frac{(c v^m - 1)\, dv}{2(v-1)\sqrt{4c v^{m+1} - (c v^m + 1)^2}}.$$

Das ist das Differential aller Verfolgungskurven, die auf der Kugel unter den angegebenen Bedingungen entstehen. Setzt man noch fest, daß mit wachsendem y auch x wachsen soll, so ist nur das positive Zeichen zu nehmen.

§ 5.

Diskussion des Differentials und Bestimmung der Konstanten c.

Das aus Gleichung [5] entstehende Integral ist nur für $m = 1$ ausführbar. Für $m = 2$ erhält man elliptische Integrale, ebenso, wie sich später zeigen wird, für $m = \frac{1}{2}$ und $m = \frac{1}{3}$. Für andere Werte von m kommt man auf hyperelliptische Integrale.

Aus Gleichung [5] lassen sich zunächst noch zwei andere Formen ableiten. Wenn man nämlich zur Bestimmung der Kurve die Lage des verfolgten Punktes zugrunde legt, d. h. nicht y, sondern y′ zur unabhängigen Variabeln wählt, so geht unter Berücksichtigung von:

$$\frac{dy'}{dx} = m\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \sin^2 x}$$

[5] über in:

$$[1] \qquad \frac{dy'}{dv} = \frac{m(c v^m + 1)}{2v\sqrt{4c v^{m+1} - (c v^m + 1)^2}}.$$

Setzt man ferner in [5]

$$\frac{dv}{2(v-1)} = \frac{dx}{\sin x \cos x} = \operatorname{tg}(y' - y),$$

so ergibt sich:

$$[2] \qquad \operatorname{tg}(y' - y) = \frac{c\,v^m - 1}{\sqrt{4\,c\,v^{m+1} - (c\,v^m + 1)^2}}.$$

Diese Gleichung soll hauptsächlich der Diskussion zugrunde gelegt werden, und zwar soll untersucht werden, wo wird die Funktion zu Null, wo unendlich, und wann tritt ein extremer Wert ein.

Da m keineswegs eine ganze Zahl zu sein braucht, soll fortan $\frac{m}{n}$ statt m gesetzt werden, wobei m und n zueinander prim sein sollen. Man kann sich darauf beschränken, m als rationale Größe aufzufassen, denn eine irrationale kann man sich durch einen Bruch oder eine ganze Zahl ersetzt denken, welche sich nur wenig von der irrationalen Größe unterscheidet, also auch keine prinzipiell andere Kurvenform hervorrufen wird.

Außerdem sei:

$$v^{\frac{1}{n}} = w,$$

dann kommt:

$$[3] \qquad \operatorname{tg}(y' - y) = \frac{c\,w^m - 1}{\sqrt{4\,c\,w^{m+n} - (c\,w^m + 1)^2}}.$$

Zur Bestimmung von c werden die Stellen der Kurve ins Auge gefaßt, für welche sich y und y' um $\frac{\pi}{2}$, $3\frac{\pi}{2}$ ... unterscheiden, d. h. an denen der betreffende Meridian senkrecht auf der Kurve steht. Der Wert von x, für den das geschieht, sei mit b bezeichnet. Wie viel solcher x — b es für jede einzelne Kurve gibt, soll später entschieden werden. Für x b muß also in [3] der Radikand im Nenner verschwinden. Es muß daher, wenn der zu b gehörige Wert von w mit w_b bezeichnet wird, die Gleichung bestehen:

$$4\,c\,w_b^{m+n} - (c\,w_b^m + 1)^2 = 0.$$

Hieraus folgt:

$$[4] \qquad c_{1,2} = \left\{\cos\tfrac{m}{n}\,b \frac{1 + \sin b}{\cos b}\right\}^2.$$

Durch jeden Punkt x b gehen also stets zwei verschiedene Verfolgungskurven, auf der einen ist die Konstante c_1, auf der andern c_2 zu nehmen. Es wird sich später herausstellen, daß den verschiedenen Konstanten zwei verschiedene Anfangslagen des ver-

folgten Punktes entsprechen. Die beiden Konstanten sind in einfacher Weise voneinander abhängig, denn es folgt aus [4]:

$$[5] \qquad c_1 \cdot c_2 = \cos^4 \tfrac{m}{n} b.$$

Der eine Wert c_1 (das „—“-Zeichen zu nehmen) ist kleiner als 1. Wenn er genommen wird, so muß, wenn v die Werte von 1 bis ∞ durchläuft, der Fall eintreten, wo $v^{\frac{m}{n}} = \frac{1}{c_1}$ wird. Der Wert von x, für welchen das geschieht, sei gleich a.

$$[6] \qquad c_1 = \cos^{\frac{2m}{n}} a.$$

Für einen solchen Punkt ist der Radikand von [3] von Null verschieden, der Zähler dagegen verschwindet. Also sind y′ und y in diesen Punkten gleich, oder sie unterscheiden sich um ganze Vielfache von π, beide Punkte befinden sich also auf demselben Meridian. Aus [5] und [6] folgt noch:

$$[7] \qquad c_2 = \left\{\frac{\cos^2 b}{\cos a}\right\}^{\frac{2m}{n}}.$$

Zur Abkürzung soll jetzt festgesetzt werden, daß ein Kurvenpunkt, für den $x = a$ ein Punkt A, ein solcher, für den $x = b$ ein Punkt B genannt werden soll. Für die A-Punkte stellen y und y′ denselben Meridian dar, für die B-Punkte unterscheiden sie sich um $\frac{\pi}{2}$.

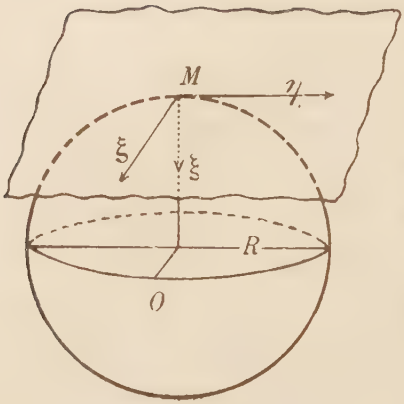
Nachdem die Bedeutung von c erkannt ist, läßt sich das Differential [5] in § 4 in die Gleichung der ebenen Verfolgungskurve überführen, sobald man den Radius der Kugel über alle Grenzen hinaus wachsen läßt. Das soll erst noch gezeigt werden, bevor in der Diskussion der Gleichungen fortgefahren wird.

§ 6.

Ableitung der Gleichung der ebenen Verfolgungskurve.

Es war nach § 4, Gl. [5]:

$$[1] \qquad dy = \frac{(c\,v^m - 1)\,dv}{2\,(v-1)\sqrt{4\,c\,v^{m+1} - (c\,v^m + 1)^2}}.$$



Man gehe zu dem gewöhnlichen rechtwinkligen Koordinatensystem im Raum über. Der Pol wird von O nach M verlegt. Die Koordinaten sind ξ, η, ζ, der Radius ist R.

$$[2] \qquad v = \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{R^2}{\xi^2}$$

$$[3] \quad c = \cos^{2m} a = \left\{\frac{c'}{R}\right\}^{2m} = \frac{c_1}{R^{2m}}$$

$$[4] \quad y = \operatorname{arc\,tg} \frac{\sqrt{R^2 - \xi^2 - \eta^2}}{\eta}.$$

Die Differentiation dieser Gleichung gibt:

$$dy = -d\eta \frac{\sqrt{R^2 - \xi^2 - \eta^2}}{R^2 - \xi^2} - \frac{\eta\, d\eta}{R^2 - \xi^2}\left[\frac{\eta}{\sqrt{R^2 - \xi^2 - \eta^2}} + \frac{\xi \frac{d\xi}{d\eta}}{\sqrt{R^2 - \xi^2 - \eta^2}}\right].$$

Für die rechte Seite von Gleichung [1] ergibt sich:

$$\frac{-\left[\frac{c_1}{\xi^{2m}} - 1\right] d\xi}{R\left(\xi - \frac{\xi^3}{R^2}\right)\sqrt{\frac{4c_1}{\xi^{2(m+1)}} - \left[\frac{c_1}{\xi^{2m}} + 1\right]^2 \frac{1}{R^2}}}.$$

Also wird die ganze Gleichung [1], wenn man sie noch mit R multipliziert:

$$[5] \quad \frac{d\eta\, R\sqrt{R^2 - \xi^2 - \eta^2}}{R^2 - \xi^2} + \frac{\eta\, d\eta\, R}{\sqrt{R^2 - \xi^2}}\left[\frac{\eta}{\sqrt{R^2 - \xi^2 - \eta^2}} + \frac{\xi \frac{d\xi}{d\eta}}{\sqrt{R^2 - \xi^2 - \eta^2}}\right]$$

$$= \frac{\left(\frac{c_1}{\xi^{2m}} - 1\right) d\xi}{\left[\xi - \frac{\xi^3}{R^2}\right]\sqrt{\frac{4c_1}{\xi^{2(m+1)}} - \left[\frac{c_1}{\xi^{2m}} + 1\right]^2 \frac{1}{R^2}}}.$$

Jetzt soll R über alle Grenzen hinaus wachsen. Es ist:

$$\lim_{R=\infty} \frac{R\sqrt{R^2-\xi^2-\eta^2}}{R^2-\xi^2} = 1.$$

Die Gleichung [5] wird dann:

[6] $$d\eta = \frac{1}{2}\left[\frac{\sqrt{c_1}}{\xi^m} - \frac{\xi^m}{\sqrt{c_1}}\right] d\xi.$$

Man setze noch:

$$\sqrt{c_1} = \frac{1}{c_2},$$

so kommt:

$$2\,d\eta = \left\{\frac{1}{c_2\,\xi^m} - c_2\,\xi^m\right\} d\xi.$$

Dabei ist:

[7] $$c_2 = \frac{1}{\sqrt{c_1}} = \frac{1}{R^m \cos^m a}.$$

Die in Gino Loria: „Spezielle ebene Kurven“ angegebene Gleichung lautet:

$$2\,dy = c^{-1}\,x^{-n}\,dx - c\,x^n\,dx.$$

§ 7.

Fortsetzung der Diskussion der Gleichungen auf der Kugel.

Die entstandenen Gleichungen führen zu wesentlich verschiedenen Fällen, je nachdem $\frac{m}{n} \gtreqless 1$ ist.

Erster Hauptfall: $\frac{m}{n} < 1$.

I. $c < 1$.

Zunächst werden für diesen speziellen Fall die durch Gleichung [4] in § 5 dargestellten Konstanten betrachtet, und zwar ist der Wert c_1 zu nehmen. In der Tat ist c_1 kleiner als 1, denn:

$$c_1 = \left\{\frac{1-\sin b}{\cos^{1-\frac{m}{n}} b}\right\}^2.$$

Es ist aber:

$$1 - \sin b < \cos b \text{ erst recht } < \cos^{1-\frac{m}{n}} b.$$

Also ist c_1 stets kleiner als Eins. c_2 dagegen, wie leicht einzusehen, stets größer. Als Grenzwerte folgen:

$$c_1 < 1 \quad \text{für } b = 0 : c = 1, \text{ für } b = \frac{\pi}{2} : c = 0$$

$$c_2 > 1 \quad \text{für } b = 0 : c = 1, \text{ für } b = \frac{\pi}{2} : c = \infty.$$

Der nähere Zusammenhang der beiden Größen wird sich am Schluß dieses Abschnittes ergeben. Jetzt soll festgestellt werden, wieviel Werte b es für eine Kurve gibt, d. h. es muß umgekehrt v als Funktion von c, in diesem Falle von c_1, untersucht werden.

Der Radikand in Gleichung [10] lautet, nach fallenden Potenzen von w geordnet:

[1] $$4 c w^{m+n} - c^2 w^{2m} - 2 c w^m - 1 = f(w).$$

Wann wird dieser Ausdruck Null? Wenn n ungerade ist, können nur positive Wurzeln in Betracht kommen, denn $w^n = v = \frac{1}{\cos^2 x}$ muß stets posisiv sein. Da ein Zeichenwechsel vorhanden ist, so existiert höchstens eine positive Wurzel. Es ist:

[2] $$\begin{cases} f(1) = -(c-1)^2 < 0 \\ f\left(\frac{1}{c^{\frac{1}{m}}}\right) = \frac{4}{c^{\frac{n}{m}}} - 4 > 0, \end{cases}$$

denn c ist ein echter, $\frac{n}{m}$ ein unechter Bruch.

Für den Fall, daß n eine gerade Zahl ist, könnten auch negative Wurzeln Bedeutung haben, denn $(-w)^n = v$ wäre in diesem Falle doch positiv. m müßte dann aber ungerade sein, da m und n zueinander prim sein sollen. Man setze also in der Gleichung [1] $(-w)$ statt w. Dann geht sie über in:

[3] $$-4 c w^{m+n} - (-c w^m + 1)^2 = 0.$$

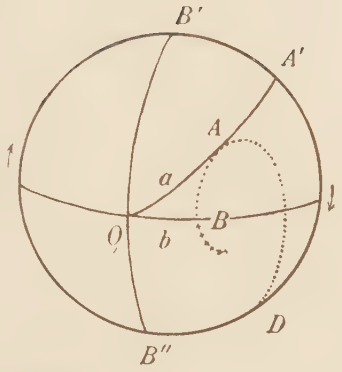
Für ein positives w ist diese Gleichung nicht zu erfüllen. Die ursprüngliche Gleichung hat also nur die eine positive Wurzel. Sie liegt, wie soeben gezeigt wurde, zwischen 1 und demjenigen w, das zum Punkte A gehört. Es existiert also nur ein Punkt B. Wie die folgende Betrachtung zeigt, ist dieser Fall verwirklicht, wenn der verfolgte Punkt sich zu Anfang in B′ befindet.

Erste Hauptanfangslage des verfolgten Punktes.

$$c_1 = \left\{\cos^{\frac{m}{n}} b \, \frac{1 - \sin b}{\cos b}\right\}^2 \cos^{\frac{2m}{n}} a.$$

Hierbei ist vorausgesetzt, daß ein Punkt A vorhanden ist. Das war aber nur der Fall, wie früher gezeigt ist, wenn $c < 1$ ist, denn

nur dann kann der Zähler verschwinden. Diesem Falle entspricht eine Kurve mit der Anfangslage in B′.



$$OB = b.$$

$$OA = a.$$

Gleichung [3] in § 5 läßt sich schreiben:

$$[4] \quad \operatorname{tg}(y' - y) = \frac{\left[\frac{\cos a}{\cos x}\right]^{\frac{2m}{n}} - 1}{\sqrt{4\left[\frac{\cos a}{\cos x}\right]^{\frac{2m}{n}} \frac{1}{\cos^2 x} - \left\{\left[\frac{\cos a}{\cos x}\right]^{\frac{2m}{n}} + 1\right\}^2}}.$$

b ist der kleinste Wert, den x annehmen kann, denn für $x < b$ wird der Radikand negativ. Für wachsende x nimmt er dann zu, während der absolute Wert des Zählers kleiner und schließlich gleich Null wird für $x = a$ im Punkte A. In diesem Intervall ist der Zähler negativ, somit y größer als y′ [die y sollen gerechnet werden im Sinne des Uhrzeigers]. Von A ab ist der Zähler positiv, y′ ist größer als y. Diese Differenz erreicht ein Maximum (ist noch zu zeigen) und nimmt dann wieder ab, bis schließlich y abermals gleich y′ wird. Dies geschieht für $x = \frac{\pi}{2}$ der verfolgende Punkt hat den andern auf dem Äquator erreicht in D, denn für $x = \frac{\pi}{2}$ wird der Nenner in höherem Grade unendlich als der Zähler, der Bruch also gleich Null.

§ 8.

Trajektorien der Verfolgungskurven $\frac{m}{n} < 1$, $c < 1$, dargestellt durch die Kurve der größten Differenzen: $y' - y$.

Es war noch zu zeigen, daß $\operatorname{tg}(y' - y)$ in der Tat in dem betreffenden Intervall (A bis D) einen extremen Wert besitzt. Dazu schreibe man es in der Form:

$$[1] \qquad \operatorname{tg}(y' - y) = \frac{c}{\sqrt{4\,c\,w^{-m+n} - (c + w^{-m})^2}} - \frac{1}{\sqrt{4\,c\,w^{m+n} - (c\,w^m + 1)^2}}.$$

$$[2] \quad \frac{d\,[\operatorname{tg}(y' - y)]}{d\,w} = -\frac{c\,[2\,c\,(n-m)\,w^{-m+n-1} + (c + w^{-m})\,m\,w^{-m-1}]}{\sqrt{4\,c\,w^{-m+n} - (c + w^{-m})^2}^{\,3}} + \frac{2\,c\,(m+n)\,w^{m+n-1} - (c\,w^m + 1)\,m\,c\,w^{m-1}}{\sqrt{4\,c\,w^{m+n} - (c\,w^m + 1)^2}^{\,3}} = 0.$$

Um auf gleichen Nenner zu bringen, wird der erste Bruch mit w^{3m} erweitert. Außerdem läßt sich $c\,w^{m-1}$ als Faktor absondern. Setzt man den Zähler gleich 0, so ergibt sich die Gleichung:

$$[3] \qquad c\,w^{m+n}(n-m) - w^n(m+n) + m\,c\,w^m + m = 0 = f(w).$$

Die Gleichung hat zwei Zeichenwechsel, also höchstens zwei positive Wurzeln.

$$[4] \qquad \begin{cases} f(0) = +m > 0 \\ f(1) = n\,(c-1) < 0. \end{cases}$$

Denn $c < 1$. Eine Wurzel liegt zwischen 0 und 1, ist also unbrauchbar.

$$[5] \qquad \begin{cases} f\left(\frac{1}{c^{\frac{1}{m}}}\right) = 2\,m\left(1 - \frac{1}{c^{\frac{n}{m}}}\right) < 0 \\ f(\infty) > 0. \end{cases}$$

Die zweite Wurzel ist also größer als $\frac{1}{c^{\frac{1}{m}}}$, liegt daher auf dem Stück zwischen A und D und entspricht unseren Anforderungen. Dieser Wert läßt sich noch genauer bestimmen. $f(w) = 0$ kann nämlich auf die Form gebracht werden:

$$\frac{c\,w^m + 1}{c\,w^m - 1}\,\frac{w-1}{w} = \frac{n}{m} \quad \text{oder:}$$

$$[6] \qquad \frac{c\,v^{\frac{m}{n}} + 1}{c\,v^n - 1}\,\frac{v^n - 1}{v^{\frac{m}{n}} - 1} = \frac{n}{m}.$$

Es ist wesentlich, auch Gleichung [3] für $c = 1$ besonders zu diskutieren, da die letzte Diskussion für diesen Wert nicht gilt.

Gleichung [4] hat eine Wurzel w 1. Sie läßt sich also durch w — 1 dividieren und gibt:

$$[3'] \qquad \frac{f(w)}{w-1} = (n-m)\left\{w^{m+n-1}\ldots w^{n}\right\} - 2m\left\{w^{n-1}\ldots w^{m}\right\} - m\left\{w^{m-1}+\ldots 1\right\}.$$

Hieraus folgt:

$$\left[\frac{f(w)}{w-1}\right]_{w=1} = -mn < 0$$

$$\left[\frac{f(w)}{w-1}\right]_{w=\infty} > 0,$$

also ebenfalls eine positive Wurzel, die größer 1 ist.

Jetzt stellt die linke Seite von Gleichung [6] das Integral der dem Problem zugrunde liegenden Differentialgleichung dar (Gleichung [4], Seite 12). Es war früher mit u bezeichnet und definiert durch die Gleichung:

$$u = \sqrt{\frac{1}{p^2} + \frac{v-1}{v}}.$$

Nach Gleichung [6] kann für u gesetzt werden $\frac{n}{m}$. Dann geht die letzte Gleichung über in:

$$[7] \qquad dy = \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{n}{m}\right)^2 - \sin^2 x}}.$$

Diese Gleichung hängt von c nicht mehr ab. Die durch sie dargestellte Kurve hat folgende geometrische Bedeutung. Läßt man in der Figur auf Seite 19 den Punkt A sich längs des Meridians OA′ bewegen, behält man aber $\frac{m}{n}$ bei, so entsteht eine Schar von Verfolgungskurven mit dem Index $\frac{m}{n}$, die alle OA′ tangieren. Würde nun auf jeder einzelnen Kurve dasjenige x bestimmt, für das $\operatorname{tg}(y' - y)$ ein Maximum wird, so wird die Gesamtheit dieser Punkte dargestellt durch [7]. Wenn [7] integriert wird, so entsteht noch eine Konstante. Diese erklärt sich daraus, daß Gleichung [1] über den Anfangsmeridian nichts aussagt, von einem solchen unabhängig ist. Um die Konstante zu beseitigen, wird bestimmt, daß für $x = 0$, $y = 0$ sein soll. Dann folgt aus [7]:

$$y = \frac{m}{n} \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1 - \left(\frac{m}{n}\right)^2 \sin^2 x}}$$

oder:

[8] $$y = k\,F(k, x).$$

Kurve der größten Differenzen $y' - y$.

Die rechte Seite der Gleichung besteht also aus einem elliptischen Integral erster Gattung. Wenn der Bogen der Kurve gleich s gesetzt wird, so ist:

[9] $$s = F(k, x).$$

Die Kurve hat also die merkwürdige Eigenschaft, daß das Verhältnis des bis zu einem bestimmten Punkte gemessenen Bogens und dem zu diesem Punkte gehörigen Winkel konstant ist.

[10] $$\frac{y}{s} = k = \frac{m}{n} \quad \text{oder:}$$

$$y : s = m : n.$$

Der ganze Bogen der Kurve ist:

$$S = K.$$

Die Kurve geht durch den Pol; die durch den Pol gehende Verfolgungskurve trifft sie aber noch einmal, wie durch Diskussion der Gleichung [3′], Seite 21 gezeigt ist. Je kleiner $\frac{m}{n}$ wird, um so mehr nähern sich beide Kurven in der Form, und für $\frac{m}{n} = 0$ fallen sie zusammen mit dem Anfangsmeridian, denn [8] und [9] liefern:

$$y = 0$$

$$s = \frac{\pi}{2}.$$

§ 9.

II. $c > 1$.

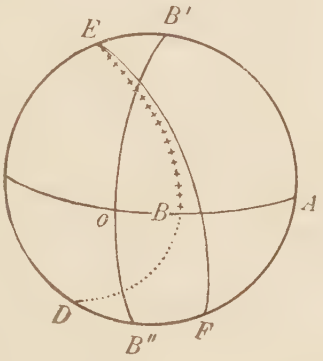
Zweite Hauptanfangslage des verfolgten Punktes.

Nach § 5, Gleichung [4] ist:

$$c_2 = \left\{\cos^{\frac{m}{n}} b \, \frac{1 + \sin b}{\cos b}\right\}^2.$$

Der zweite Wert von c ist stets größer als Eins. Er ist zu verwenden, wenn man die Anfangslage des verfolgten Punktes in

B″ annimmt. Es ist zu Anfang wieder $x = b$, $y' - y = \frac{\pi}{2}$. Da P sich schneller bewegt als P′, so wird diese Differenz beständig kleiner, bis sie schließlich für $w = \infty$ zu Null wird, ganz wie im ersten Fall. Auf diesem Wege jedoch, also für ein endliches w kann die Differenz nie gleich Null werden. Diese Überlegungen werden durch die Gleichung bestätigt. Der Zähler $c\,w^m - 1$ kann für $c > 1$ nicht verschwinden. b ist der kleinste Wert, den x annehmen kann. Läßt man x wachsen, so nehmen Zähler und Nenner zu. Dieser jedoch schneller als jener, denn er ist von höherem Grade, der Wert des Bruches wird also immer geringer und verschwindet schließlich für $w = \infty$, $x = \frac{\pi}{2}$. Man erhält die andere Hälfte der Verfolgungskurve entweder dadurch, daß man annimmt, P′ bewege sich von B″ nach A und P flieht vor P′, oder P verfolgt P′, der sich von B′ nach E bewegt. Man erhält beide Male dieselbe Kurve, denn $B'E = B''F$.



§ 10.

Gemeinsame Form für c_1 und c_2.

Die beiden Konstanten, die die Gestalt der Kurve so wesentlich beeinflussen, lassen sich durch ein und dieselbe Gleichung definieren, sobald man mit b nicht schlechthin den sphärischen Abstand der Kurve von 0 bezeichnet, sondern den Polarabstand des konvexen Kurvenbogens. Dann wird:

$$c = \left\{ \frac{\cos^{\frac{m}{n}} b\,(1 - \sin b)}{\cos b} \right\}^2.$$

Für den ersten Fall (Anfangslage in B′) ist $b < \frac{\pi}{2}$, es wird $c = c_1$. Für den zweiten Fall ist $b > \frac{3}{2}\pi$. Es wird daher, weil:

$$\sin(2\pi - b) = -\sin b$$
$$\cos(2\pi - b) = \cos b,$$

in der Tat $c = c_2$.

§ 11.

Länge der Kurve.

Jetzt steht noch die Frage offen, wie oft der verfolgende Punkt den Pol umkreist, ehe er P′ erreicht. Man könnte auch fragen: Wie hängt die Kurvenlänge mit c und $\frac{m}{n}$ zusammen? Die Differenz $y' - y$ ist genügend erörtert, es handelt sich um den absoluten Betrag entweder von y oder y′. Es wäre zu diesem Zwecke Gleichung [5], § 4 oder [1] § 5 in eine Reihe zu entwickeln und zwischen bestimmten Grenzen zu integrieren. Es läßt sich aber auch auf einfachere Weise über die Größe des absoluten Betrages von y′ ein Urteil abgeben, denn man kann ihn zwischen zwei Grenzen einschließen, wenn man § 5, Gleichung [1] etwas umformt. Es war:

$$\frac{dy'}{dv} = m \frac{c v^m + 1}{2 v \sqrt{4 c v^{m+1} - (c v^m + 1)^2}}.$$

Setzt man: $v = \frac{1}{z^2}$, also $z = \cos x$,

so kommt:

[1] $$dy' = -\frac{m}{2\sqrt{c}} \frac{dz\,(c z^{-m} + z^m)}{\sqrt{1 - \left[\frac{c z^{-m+1} + z^{m+1}}{2 c^{\frac{1}{2}}}\right]^2}}.$$

Jetzt soll integriert werden von B bis D (Figuren Seite 19, 23). y′ genügt dann den beiden Ungleichungen:

$$y' < \frac{m}{2\sqrt{c}} \int_B^D \frac{dz \left[c z^{-m} + z^m \quad \frac{m+1}{-m+1}\right]}{\sqrt{1 - \left[\frac{c z^{-m+1} + z^{m+1}}{2 c^{\frac{1}{2}}}\right]^2}}.$$

$$y' > \int_B^D \frac{dz \left[c z^m \quad \frac{-m+1}{m+1} + z^m\right]}{\sqrt{1 - \left[\frac{c z^{-m+1} + z^{m+1}}{2 c^{\frac{1}{2}}}\right]^2}}.$$

Es sei:

[2] $$\frac{c z^{-m+1} + z^{m+1}}{2\sqrt{c}} = u.$$

Wenn man außerdem berücksichtigt, daß:

$$\frac{y'}{m} = s \quad \text{(Bogen der Kurve)},$$

so folgt:

$$[3] \qquad \frac{1}{1-m}\Big[\arcsin u\Big]_B^D > s > \frac{1}{1+m}\Big[\arcsin u\Big]_B^D.$$

Im ersten Falle (Figur Seite 19) ist zu integrieren von B bis A und dann von A bis D. Die Richtung ist in den beiden Intervallen entgegengesetzt, also müssen auch die Vorzeichen verschieden sein. u ist im Punkte B: = 1 für A: cos a, für D: 0. Also wird:

$$[4] \qquad \frac{1}{1-m}\left\{\frac{\pi}{2} - 2\arcsin(\cos a)\right\} > s > \frac{1}{1+m}\left\{\frac{\pi}{2} - \arcsin(\cos a)\right\}.$$

Für den zweiten Fall braucht man keine Teilintervalle. Es ist:

$$[5] \qquad \frac{\frac{\pi}{2}}{1-m} > s > \frac{\frac{\pi}{2}}{1+m}.$$

Es ist zu bemerken, daß die Grenzen vom Anfangswerte a nicht abhängen.

§ 12.

Die Tangente an die Kurve im Punkte B. Polkurve: c = 1.

Die Tangente an die Kurve kann als eine Verfolgungskurve mit dem Index $\frac{m}{n} = 0$ aufgefaßt werden. Diese Betrachtungsweise ist schon durchgeführt, indem die Differentialgleichung für $\frac{m}{n} = 0$ gelöst wurde. Man erhält die Gleichung der Tangente in etwas anderer Form, wenn man vom Integral der Gleichung $\frac{m}{n} = 0$ ausgeht.

Das Differential wird:

$$dy = -\frac{(c-1)\,dv}{2(v-1)\sqrt{4cv-(c+1)^2}}.$$

Integriert man und setzt man fest, daß für $x = \frac{\pi}{2}$; $y = \alpha + \frac{\pi}{2}$ sein soll, so wird:

$$y - \alpha = \operatorname{arc\,tg}\frac{2\sqrt{c}}{c-1}\sqrt{v - \left[\frac{c+1}{2\sqrt{c}}\right]^2} \quad \text{oder}$$

$$[1] \qquad \cos(y - \alpha) = \pm \frac{2\sqrt{c}}{c - 1} \operatorname{tg} x.$$

Der Nenner wird positiv oder negativ, je nachdem $c \gtrless 1$ ist, in dem einen Falle ist das positive, im anderen das negative Vorzeichen zu wählen, wie noch gezeigt werden wird.

Die in § 3 gefundene Gleichung lautete:

$$\cos(y - \alpha) = \frac{\operatorname{tg} r}{\operatorname{tg} x}.$$

Für r ist in unserem Falle b zu setzen. Es muß dann sein:

$$[2] \qquad \operatorname{tg} b = + \frac{c - 1}{2\sqrt{c}}.$$

Hieraus folgt:

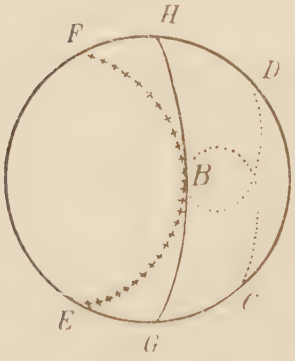
$$[3] \qquad c_{1,2} = \left(\frac{1 + \sin b}{\cos b}\right)^2$$

$$[4] \qquad c_1 \cdot c_2 = 1.$$

Dieselben Werte ergeben sich, wenn man in den Gleichungen [4] und [5] in § 5 $\frac{m}{n} = 0$ setzt.

Jetzt sieht man leicht, daß in obiger Gleichung [1] in der Tat das entgegengesetzte Vorzeichen zu wählen ist, wenn man c_1 mit c_2 vertauscht und dabei [4] berücksichtigt.

Man erhält also folgende Figur.



HG ist die Tangente, deren Gleichung soeben aufgestellt wurde. BC ist eine Kurve, bei der sich der verfolgte Punkt zuerst in H befindet, EB eine Kurve mit demselben Geschwindigkeitsverhältnis, wo aber der verfolgte Punkt zuerst in G ist. BD und BF entstehen, wenn man die Kurven als Fliehkurven auffaßt. Auf CBD ist die Konstante $c_1 < 1$, auf EBF ist sie $c_2 > 1$.

Wird $c_1 = c_2 = 1$, so lautet die Gleichung der Tangente:

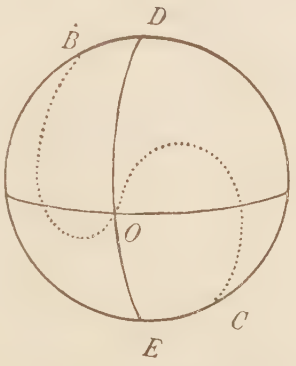
$$dy = 0$$

$$y = \text{const.}$$

Setzt man $y_0 = 0$, so ist:

$$y = 0.$$

In diesem Falle werden die Kurven CBD und EBF kongruent. Die sphärische Gerade DE und in der oberen Figur GH ist also die Grenzform, der sich die Kurven bei abnehmendem $\frac{m}{n}$ immer mehr nähern. Je mehr dagegen das Verhältnis $\frac{m}{n}$ wächst, je näher es der 1 kommt, um so länger wird der Weg des verfolgenden Punktes, um so häufiger wird der Pol umkreist, ehe der andere Punkt erreicht wird. Die für alle Kurven $\frac{m}{n} < 1$ erhaltenen Resultate sollen jetzt bei einer speziellen Kurve angewendet und auf ihre Richtigkeit hin geprüft werden. $\frac{m}{n} = \frac{1}{2}$ und $\frac{m}{n} = \frac{1}{3}$ führten auf elliptische Integrale. Der Fall $\frac{m}{n} = \frac{1}{3}$ soll näher untersucht werden.



§ 13.

Spezialfall: $\frac{m}{n} = \frac{1}{3}$.

Die Richtigkeit der erhaltenen Resultate läßt sich an dem der direkten Betrachtung zugänglichen Spezialfalle $\frac{m}{n} = \frac{1}{3}$ leicht zeigen.

Aus § 5, Gleichung [1] folgt:

[1] $$dy' = \frac{1}{4\sqrt{c}} \left(c + \frac{1}{w} \right) \frac{dw}{\sqrt{w^4 - \left(\frac{cw+1}{2\sqrt{c}} \right)^2}}.$$

Es soll nicht Gleichung [5] von § 4, sondern § 5 Gleichung [1] zugrunde gelegt werden, weil die resultierende Gleichung übersichtlicher wird.

Der Nenner verschwindet für folgende vier Werte:

$$a = \frac{\sqrt{c}}{4} + \sqrt{\frac{c}{16} + \frac{1}{2\sqrt{c}}}.$$

$$\beta = -\frac{\sqrt{c}}{4} - \sqrt{\frac{c}{16} - \frac{1}{2\sqrt{c}}}.$$

$$\gamma = -\frac{\sqrt{c}}{4} + i\sqrt{\frac{1}{2\sqrt{c}} - \frac{c}{16}}.$$

$$\delta = -\frac{\sqrt{c}}{4} - i\sqrt{\frac{1}{2\sqrt{c}} - \frac{c}{16}}.$$

Nur α ist positiv.

Die zu B und A gehörigen Polarabstände sind also:

$$b = \arccos\sqrt{\frac{1}{\alpha^3}}$$

$$a = \arccos c\sqrt{c}.$$

Das Integral von [1] wird elliptisch. Es wird substituiert:

[2] $$w = -\frac{2}{c(z+1)},$$

dann kommt:

$$dy' = -\frac{c\sqrt{c}}{16}(1-z)\frac{dz}{\sqrt{1-\left[\frac{(z^2-1)c^{\frac{3}{2}}}{8}\right]^2}}.$$

I. $c < 1$.

Man erhält also ein elliptisches Integral erster Gattung und ein elementares. Dieses hat den Wert:

$$-\frac{1}{4}\arcsin\left[\frac{c\sqrt{c}}{8}(z^2-1)\right].$$

Bei dem andern wird die Substitution gemacht:

[3] $$z = \frac{\sqrt{8+c^{\frac{3}{2}}}}{c^{\frac{3}{4}}}\cos\varphi.$$

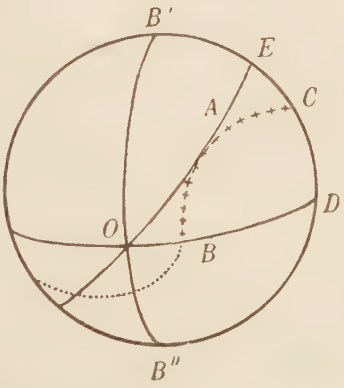
Der Modul des Integrals wird:

[4] $$k^2 = \frac{8+c^{\frac{3}{2}}}{16}.$$

Aus [2] folgt, da w stets positiv ist, daß z immer negativ sein muß. $\cos\varphi$ also < 0, φ liegt zwischen $\frac{\pi}{2}$ und π. Die ganze Gleichung wird daher:

$$y' = -\frac{1}{4}\left\{\arcsin\frac{1}{8}\left[\left(8+c^{\frac{3}{2}}\right)\cos^2\varphi - c^{\frac{3}{2}}\right] + \frac{c^{\frac{3}{4}}}{2}\int\frac{d\vartheta}{\triangle\varphi}\right\} + C.$$

Wenn man OD als Anfangsmeridian nimmt, befindet sich für B, P' in B', also $y' = -\frac{\pi}{2}$. Für B ist $w = \alpha$. Daraus folgt:



$$z_B = \frac{-\sqrt{8+c^{\frac{3}{2}}}}{c^{\frac{3}{4}}}; \quad \varphi_B = \pi.$$

Also folgt für die Konstante:

$$C = -\frac{3}{8}\pi + \frac{1}{8}\frac{c^{\frac{3}{4}}}{2}\int_{\varphi=\pi}\frac{d\varphi}{\triangle\varphi}.$$

Statt des stumpfen Winkels φ soll der spitze φ' eingeführt werden:

$$\varphi = \pi - \varphi'.$$

In der folgenden Gleichung ist unter φ der spitze Winkel φ' zu verstehen:

$$[5] \quad y' = -\frac{1}{4}\left\{\frac{3}{2}\pi + \arcsin\frac{1}{8}\left[\left(8+c^{\frac{3}{2}}\right)\cos^2\varphi - c^{\frac{3}{2}}\right] - \frac{c^{\frac{3}{4}}}{2}\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\triangle\varphi}\right\}.$$

Für A ist: $w = \frac{1}{c}$

$$\cos\varphi_A = 3\frac{c^{\frac{3}{4}}}{\sqrt{8+c^{\frac{3}{2}}}}.$$

Für C ist: $w = \infty$

$$\cos\varphi_C = \frac{c^{\frac{3}{4}}}{\sqrt{8+c^{\frac{3}{2}}}}.$$

Also wird in den beiden Punkten:

$$[6] \qquad A: \quad y' = -\frac{1}{4}\left\{\frac{3}{2}\pi + \arcsin c^{\frac{3}{2}} - \frac{c^{\frac{3}{4}}}{2}\int_0^{\varphi_A}\frac{d\varphi}{\triangle\varphi}\right\}.$$

$$[7] \qquad C: \quad y' = -\frac{1}{4}\left\{\frac{3}{2}\pi - \frac{c^{\frac{3}{4}}}{2}\int_0^{\varphi_C}\frac{d\varphi}{\triangle\varphi}\right\}.$$

Der größte Wert, den das Integral annehmen kann, tritt ein für $\varphi = \frac{\pi}{2}$ und für das Maximum von k. Dies wiederum findet statt für $c = 1$, es ist:

$$k = \frac{3}{4}, \quad \text{und dazu gehört:}$$

$$K = 1{,}91115.$$

Also sind die Klammern in den beiden obigen Gleichungen stets positiv, die beiden y′ also stets negativ. Man sieht, daß die Punkte C und E zwischen B′ und D liegen. Außerdem ist DE auch wirklich größer DC, denn $\varphi_C > \varphi_A$. Die Kurve hat mithin die gezeichnete Form.

Jetzt soll angenommen werden, B rücke immer näher an D heran und falle schließlich auf den Äquator. Dann muß der Treffpunkt C die Strecke B′D im Verhältnis 3 : 1 teilen. In der Tat ergibt sich das auch aus [7]. Für den beschriebenen Fall ist nämlich $b = \frac{\pi}{2}$, also $c = 0$.

$$k^2 = \frac{1}{2}$$

$$\cos\varphi_C = 0; \quad \varphi_C = \frac{\pi}{2}, \quad \text{also:}$$

$$y' = -\frac{1}{4}\left\{\frac{3}{2}\pi - 0 \cdot K\right\}$$

$$y' = -\frac{3}{8}\pi, \quad \text{daher:}$$

$$DC : CB' = 3 : 1.$$

II. c = 1. (Polkurve.)

Um für einen Fall auch bestimmte Zahlenwerte anzugeben, soll angenommen werden, B fiele auf den Pol, d. h. $c = 1$. Dann wird die Gleichung:

$$[8] \qquad y' = -\frac{1}{4}\left\{\frac{3}{2}\pi + \arcsin\frac{1}{8}(9\cos^2\varphi - 1) - \frac{1}{2}F(k, \varphi)\right\}$$

$$\cos\varphi_B = \cos\varphi_A = 1.$$

A und B fallen also zusammen.

$$k = \frac{3}{4}$$

$$\varphi_C = 70^0\ 32'$$

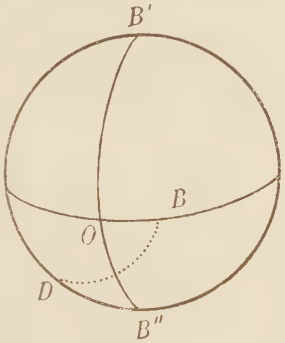
$$F(k, \varphi_C) = 1{,}395$$

$$y'_C = -\frac{1}{4}\left\{\frac{3}{2}\pi + 0 - \frac{1{,}395}{2}\right\} = -1{,}003 = -57^0{,}5.$$

III. $c > 1$.

1. $c < 4$.

Dem dritten Fall entspricht die Anfangslage in B''. Es kann die Gleichung [5] der Form nach beibehalten werden, solange $c < 4$ ist. Für $c > 4$ jedoch wird der Modul des elliptischen Integrals größer als 1, und es muß eine Umformung vorgenommen werden. Für $c = 4$ endlich erhält man eine Gleichung ohne elliptisches Integral. Nehmen wir zunächst $c < 4$ an. Für die Anfangslage ist aber nicht mehr $-\frac{\pi}{2}$, sondern $+\frac{\pi}{2}$ zu setzen, außerdem ist c_1 durch c_2 zu ersetzen. Ein Punkt A existiert nicht, daher ergibt auch [6] kein Resultat. $\left[\arcsin\left(c^{\frac{3}{2}} > 1\right)\right]$. Gleichung [7] aber geht über in:



$$\text{Punkt D: } y' = +\frac{1}{8}\left\{5\pi + c_2^{\frac{3}{4}} F(k, \varphi_C)\right\}.$$

Die beiden y' sollen bezeichnet werden mit y'_I und y'_{II}. Dann ist ihre Differenz, wenn man berücksichtigt, daß (Gleich. [5], S. 15):

$$c_2 = \frac{\cos^{4\frac{m}{n}} b}{c_1} = \frac{\cos^{\frac{4}{3}} b}{\cos^{\frac{2}{3}} a}$$

$$[9] \quad y'_{II} - y'_I = \frac{1}{8}\left\{8\pi + \frac{\cos b}{\sqrt{\cos a}} F(k, \varphi_{C_{II}}) - \sqrt{\cos a}\, F(k, \varphi_{C_I})\right\}.$$

Läßt man jetzt $c = 1$ werden, so wird $a = b$, folglich:

$$y'_{II} - y'_I = \pi.$$

Läßt man also B mit dem Pol zusammenfallen, so entsteht natürlich in beiden Fällen dieselbe Kurve, bloß erscheint sie im zweiten Falle um den Winkel π gedreht.

2. $c > 4$.

Wenn $c > 4$ ist, wird substituiert:

$$z^2 = \frac{c^{\frac{3}{2}} - 8}{c^{\frac{3}{2}}} \sin^2 \varphi + \frac{c^{\frac{3}{2}} + 8}{c^{\frac{3}{2}}} \cos^2 \varphi.$$

Der Modul wird hier:

$$k^2 = \frac{16}{8 + c^{\frac{3}{2}}}.$$

Bezeichnet man den Modul im ersten Fall mit k_1, so ist:

$$k = \frac{1}{k_1}.$$

Die Gleichung nimmt die Form an:

$$[10] \quad y' = \frac{5}{8}\pi - \frac{1}{4} \arcsin (2\cos^2 \varphi - 1) + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{c^{\frac{3}{4}}}{c^{\frac{3}{2}} + 8}}\, F(k, \varphi).$$

Für den Treffpunkt D wird $\varphi = \frac{\pi}{4}$:

$$y'_D = \frac{5}{8}\pi - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{c^{\frac{3}{4}}}{c^{\frac{3}{2}} + 8}}\, F\left(k, \frac{\pi}{4}\right).$$

Wenn B wieder auf den Äquator rückt, so bewegen sich beide Punkte auf ihm. Da die Wege bis zum Treffpunkte wieder im Verhältnis 3 : 1 stehen, so muß P' für $y' = \frac{3}{4}\pi$ eingeholt werden. Dieser Wert ergibt sich in der Tat aus der letzten Gleichung. Für $b = \frac{\pi}{2}$ wird nämlich $c = \infty$, $k = 0$ und $\operatorname{Lim}_{c=\infty} \sqrt{\frac{c^{\frac{3}{4}}}{8 + c^{\frac{3}{2}}}} = 1$.

Also:

$$y'_D = \frac{5}{8}\pi + \frac{1}{8}\pi = \frac{3}{4}\pi.$$

3. $c < 4$.

Und endlich ist noch der Fall zu betrachten, wo $c = 4$ ist. Die Gleichung vereinfacht sich dann bedeutend.

$$dy' = -\frac{1}{2}\,\frac{1-z}{z}\,\frac{dz}{\sqrt{2-z^2}}$$

$$w = \frac{1}{2(z+1)}.$$

z ist stets negativ, und sein absoluter Wert liegt zwischen $\sqrt{2}$ und 1.

Für den Anfangspunkt B soll wieder $y' = \frac{\pi}{2}$ sein. Dann lautet die Gleichung:

$$[11] \qquad y' = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\log\frac{\sqrt{2-z^2}-\sqrt{2}}{z} - \arcsin\frac{z}{\sqrt{2}} + \frac{5}{2}\pi\right\}.$$

Für den Treffpunkt wird:

$$w = \infty, \quad z = -1$$

$$y'_D = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\log(\sqrt{2}-1) + \frac{15}{4}\pi\right\}.$$

Das erste Glied der Klammer ist negativ, y'_D wird ein Wert zwischen $\frac{\pi}{2}$ und π.

Es entsteht jetzt die Frage: Worauf beruht diese Vereinfachung für einen bestimmten Wert von c? Wird es auch für andere Werte von $\frac{m}{n}$ solche Vereinfachungen geben?

Man kann schreiben:

$$w^4 - \left(\frac{c\,w+1}{2\sqrt{c}}\right)^2 = \left(w^2 + \frac{\sqrt{c}\,w}{2} + \frac{1}{2\sqrt{c}}\right)\left(w^2 - \frac{\sqrt{c}}{2}\,w - \frac{1}{2\sqrt{c}}\right) = 0.$$

Der zweite Faktor liefert stets eine positive und eine negative Wurzel. (Wie früher gezeigt.) Der erste dagegen hat zwei komplexe Wurzeln, und diese gehen im Falle $c = 4$ in zwei gleiche negative reelle über. Durch Vertauschung von w mit $-w$ folgt:

$$w^2 - \frac{\sqrt{c}}{2}\,w + \frac{1}{2\sqrt{c}} = 0.$$

Für den Fall $c = 4$ läßt sich dieser Ausdruck als Quadrat schreiben:

$$\left[w - \frac{1}{2}\right]^2 = 0.$$

Für ein anderes $\frac{m}{n}$ kann dieser Fall nicht eintreten. Die vorletzte Gleichung würde allgemein lauten:

$$w^{\frac{m+n}{2}} - \frac{\sqrt{c}}{2} w^m + \frac{1}{2\sqrt{c}} = 0.$$

Soll sich die linke Seite als Quadrat schreiben lassen, so muß sein:

$$\frac{m+n}{2} = 2m$$

$$\frac{m}{n} = \frac{1}{3}.$$

§ 14.

Zweiter Hauptfall.

$$\frac{m}{n} = 1.$$

Jetzt sollen sich die beiden Punkte mit derselben Geschwindigkeit bewegen. In diesem Falle läßt sich die Integration ausführen. Vorher soll jedoch wieder die Differenz $(y' - y)$ diskutiert werden. Gleichung [2], § 5 geht dann über in:

[1] $$\operatorname{tg}(y' - y) = \frac{c v - 1}{\sqrt{4 c v^2 - (c v + 1)^2}}.$$

Ebenso folgt aus § 4 und § 5:

[2] $$c_{1,2} = (1 \pm \sin b)^2$$

$$c_1 \cdot c_2 = \cos^4 b; \quad c_1 = \cos^2 a$$

[3] $$dy = \frac{(c v - 1)\, dv}{2(v - 1)\sqrt{4 c v^2 - (c v + 1)^2}}.$$

Für $b = \frac{\pi}{2}$ wird $c_1 = 0$, $c_2 = 4$, für $b = 0$ werden wieder beide $= 1$. Außerdem ist a wieder stets größer als b, denn:

$$c_2 \cos^2 a \quad \cos^4 b, \quad \text{da } c_2 > 1$$

$$\cos a < \cos^2 b < \cos b.$$

Erste Hauptanfangslage.

I. $c < 1$.

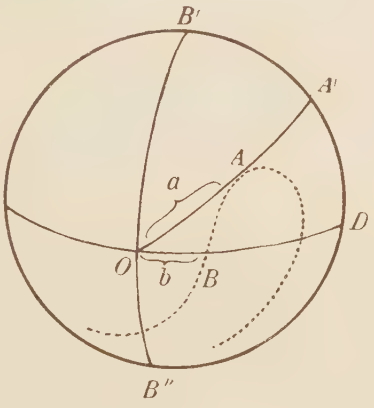
Der verfolgte Punkt befinde sich zuerst in B'. Für B sei $y' = -\frac{\pi}{2}$, $y = 0$. In B verschwindet der Nenner, weil hier $x = b$. Er wird nicht wieder 0, denn die Gleichung:

$$4cv^2 - c^2v^2 - 2cv - 1 = 0$$

hat nur eine positive Wurzel. Die beiden Wurzeln sind:

$$\alpha = \frac{1}{4c(2 - \sqrt{c})}$$

$$\beta = \frac{-1}{\sqrt{c}(2 + \sqrt{c})}.$$



Da c höchstens gleich 4 sein kann, so ist α stets positiv. Da $\alpha = \frac{1}{\cos^2 b}$, so läßt sich dieser Wert auch aus [2] berechnen.

Von B ab nimmt der Nenner zu. Der Zähler ist negativ, denn

$$cv = \frac{\cos^2 a}{\cos^2 x} < 1.$$

Dieser Bruch wächst beständig, bis er für $x = a$ zu 1 wird im Punkte A. Hier ist $y' - y = 0$. Von da ab wird die Differenz positiv und immer größer, bis sie endlich für $x = \frac{\pi}{2}$ konstant wird und den Wert annimmt:

[4] $$\lim_{v = \infty} \operatorname{tg}(y' - y) = \sqrt{\frac{c}{4 - c}}.$$

$$c = 0.$$

Für $c = 0$ ist $b = \frac{\pi}{2}$, also befinden sich beide Punkte auf dem Äquator. Da sie einander entgegenlaufen (Anfangslage B), so muß $y' - y$ zu Null werden, wie sich auch aus [4] ergibt.

Zweite Hauptanfangslage.

II. $c > 1$.

Nimmt man die zweite Anfangslage, so tritt hinsichtlich des Nenners keine Änderung ein. Der Zähler dagegen bleibt, da $c > 1$ ist, dauernd positiv. Die Entfernung der beiden Punkte ist für $v = \frac{\pi}{2}$ wieder konstant und gleich der im ersten Fall $= \sqrt{\frac{c}{c-4}}$.

$$c = 4.$$

Fällt B auf den Äquator, so ist $b = \frac{\pi}{2}$, $c = 4$, und der obige Ausdruck wird unendlich, d. h.

$$y' - y = \frac{\pi}{2}.$$

Die Punkte laufen dauernd mit derselben Entfernung auf dem Äquator hintereinander her.

III. $c = 1$.

Beginnt die Kurve im Pol, so ist $c = 1$, $b = a$. Die beiden Punkte B und A treffen also im Pol zusammen.

[5] $$\operatorname{tg}(y' - y) = \frac{v - 1}{\sqrt{4v^2 - (v+1)^2}}.$$

Die beiden Wurzeln werden:

$$\alpha = 1$$
$$\beta = -\frac{1}{3}.$$

Im Pol ist natürlich $y' - y = 0$. Die konstante Entfernung auf dem Äquator wird: $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

§ 15.

Auswertung der Integrale, wenn $\frac{m}{n} = 1$.

Da sich Gleichung [3] in § 14 integrieren läßt, so kann man die Gleichung für den Fall der gleichen Geschwindigkeiten in endlicher Form aufstellen. Da die Gestalt der Kurven schon sich aus Gleichung [1] ergeben hat, so wird die Diskussion der neuen Gleichung im wesentlichen nichts als eine Bestätigung der bekannten Resultate liefern.

I. $c < 1$.

Es war nach § 14:

$$[1] \qquad dy = \frac{(cv-1)\,dv}{2(v-1)\sqrt{4cv^2-(cv+1)^2}}.$$

Wenn man wieder annimmt, daß für $x = b$, $y = 0$, so folgt durch Integration:

$$[2] \qquad y = \frac{1}{2\sqrt{4-c}} \log \frac{z\sqrt{c}-2-\sqrt{4-c}}{z\sqrt{c}-2+\sqrt{4-c}} \cdot \frac{\sqrt{c}-2+\sqrt{4-c}}{\sqrt{c}-2-\sqrt{4-c}} + \operatorname{arc\,tg}\left\{z\frac{1+c}{1-c} - \frac{2\sqrt{c}}{1-c}\right\} - \operatorname{arc\,tg}\left\{\frac{1-\sqrt{c}}{1+\sqrt{c}}\right\}.$$

Dabei ist:

$$[3] \qquad z = \frac{2\sqrt{c}\,v - \sqrt{4cv^2-(cv+1)^2}}{cv+1}.$$

Für $x = b$ ist:

$$z_b = 1.$$

Für $x = a$ ist:

$$z_a = \frac{1-\sqrt{1-c}}{\sqrt{c}} = \frac{1-\sin a}{\cos a}.$$

Für diesen Wert wird arc tg in [2] negativ. $\frac{dz}{dv}$ ist negativ, also nimmt z mit wachsendem v ab, daher muß der Winkel zu dem negativen Argument von arc tg zwischen 0 und $-\frac{\pi}{2}$ liegen. $\operatorname{arc\,tg}(-x) = -\operatorname{arc\,tg} x$. Also wird für $x = a$:

$$y_A = \frac{\sqrt{c}}{2\sqrt{4-c}} \log \frac{-1-\sqrt{1-c}-\sqrt{4-c}}{-1-\sqrt{1-c}+\sqrt{4-c}} \cdot \frac{\sqrt{c}-2+\sqrt{4-c}}{\sqrt{c}-2-\sqrt{4-c}} - \operatorname{arc\,tg}\left\{\frac{1+c-\sqrt{1-c}}{\sqrt{c}\,(1-c)}\right\} - \operatorname{arc\,tg}\left\{\frac{1-\sqrt{c}}{1+\sqrt{c}}\right\}.$$

In diesem Punkte ist y negativ, und der Wert ist ein Minimum, da Gleichung [1] für dieses x verschwindet. Von hier ab nimmt y wieder zu.

Für $v = \infty$ wird:

$$z_\infty = \frac{2-\sqrt{4-c}}{\sqrt{c}}.$$

Setzt man dieses z in [2] ein, so wird der Nenner des Logarithmus zu Null und $\log(+\infty) = +\infty$. Das übrige bleibt endlich.

[4] $$y_\infty = \infty.$$

Die Kurve nähert sich also asymptotisch dem Äquator.

Nimmt man an, B fiele auf den Äquator, so liefen sich die beiden Punkte auf dieser Linie entgegen, sie müßten zusammentreffen für $y = -\frac{\pi}{4}$. Dies ergibt sich in der Tat aus Gleichung 2. Man hat zu setzen $c = 0$ und $v = \infty$. Es war:

$$z_\infty = \frac{2 - \sqrt{4 - c}}{\sqrt{c}}$$

$$\lim_{c=0} z_\infty = \lim_{c=0} \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{4 - c}} = 0.$$

Dann wird [2]:

$$y = 0 \cdot \log \frac{-2-2-2+2}{-2+2-2-2} + \operatorname{arc\,tg}\left\{0 \cdot 1 - \frac{2 \cdot 0}{1}\right\} - \operatorname{arc\,tg} 1$$

$$y = -\frac{\pi}{4}.$$

II. $c > 1$.

Nimmt man zweitens an, c sei größer als 1, so liefert die Integration eine Gleichung, die sich von [2] nur durch das Vorzeichen des arc tg unterscheidet:

[5] $$y = \frac{\sqrt{c}}{2\sqrt{4-c}} \log \frac{z\sqrt{c-2-\sqrt{4-c}}\,\sqrt{c-2+\sqrt{4-c}}}{z\sqrt{c-2+\sqrt{4-c}}\,\sqrt{c-2-\sqrt{4-c}}} - \operatorname{arc\,tg}\left\{z\,\frac{1+c-2\sqrt{c}}{c-1}\right\} + \operatorname{arc\,tg}\left\{\frac{\sqrt{c-1}}{\sqrt{c+1}}\right\}.$$

Hier wird ebenfalls:

$$y_{v=\infty} = \infty.$$

Für $c = 4$ bewegen sich P und P′ wieder auf dem Äquator. Es ergibt sich dann wie oben z_∞ für $c = 4$ als:

$$(z_v)_{c=4} = 1.$$

Wollte man jetzt in [5] einsetzen, so könnte man keinen bestimmten Wert erhalten, da kein Treffpunkt existiert, denn die

Punkte laufen mit gleicher Geschwindigkeit hintereinander her. In der Tat wird: $y = 0 \cdot \infty \ldots$ unbestimmt.

Man kann aber die konstante Entfernung berechnen, was in § 14 schon geschehen ist.

III. $c = 1$.

Für $c = 1$ nimmt die Gleichung eine einfache Gestalt an. Da bei der früheren Ableitung $c \lessgtr 1$ vorausgesetzt ist, so ist die Integration von [1] besonders zu leisten. Setzt man:

$$z = v\sqrt{3} - \sqrt{3v^2 - 2v - 1},$$

so kommt:

[6] $$dy = \frac{dz}{2(\sqrt{3}z - 1)}.$$

Für $x = 0$ sei $y = 0$, dann folgt:

[7] $$y = \frac{1}{2\sqrt{3}} \log \frac{2}{z\sqrt{3} - 1}.$$

Für $x = \frac{\pi}{2}$ wird z zunächst unbestimmt. Es ist:

$$\operatorname{Lim}_{v=\infty} z = \operatorname{Lim}_{v=\infty} \frac{\sqrt{3} - \sqrt{3 - \frac{2}{v} - \frac{1}{v}}}{\frac{1}{v}} = \operatorname{Lim}_{v=\infty} \frac{1 + \frac{1}{v}}{\sqrt{3 - \frac{2}{v} - \frac{1}{v^2}}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Daher:

$$y_{v=\infty} = +\infty.$$

Auch diese Kurve nähert sich asymptotisch dem Äquator.

§ 16.

Eine Trajektorie der Verfolgungskurven: $\frac{m}{n} = 1$, dargestellt durch die Kurve der kleinsten Differenzen: $y' - y$.

In § 8 war die Gleichung derjenigen Kurve aufgestellt, die die Punkte der maximalen Differenzen $(y' - y)$ einer Kurvenschar mit demselben Index $\frac{m}{n} < 1$ und demselben Anfangsmeridian (Meridian durch alle B) verbindet. Ganz analog haben alle Kurven für

$\frac{m}{n} = 1$, deren Konstanten zwischen 1 und 2 liegen, auch extreme Werte von $(y' - y)$, aber es sind Minima.

Beweis: Gleichung [3], § 8 geht für $m = n$ über in:

[1] $$2w - cw - 1 = 0, \quad w = v$$

$$v = \frac{1}{2 - c}.$$

Nun ist:

$$\left\{\frac{d^2[\operatorname{tg}(y' - y)]}{dv^2}\right\}_{v=\frac{1}{2-c}} = \frac{-2c^3 + 8c^2 - 12c + 8}{\sqrt{4c\frac{1}{(2-c)^2} - \left(\frac{c}{2-c}\right)^2}^5} > 0.$$

Der Zähler ist für $c = 1$ positiv und bleibt es für alle c, die kleiner als 2 sind, für $c = 2$ wird er zu Null. Man hat also für alle Werte von c zwischen 1 und 2 an der Stelle $v = \frac{1}{2 - c}$ ein Minimum.

Gleichung [8], § 8 geht also über in:

[2] $$y = \int_0^x \frac{dx}{\cos x}$$

[3] $$y = \log \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)$$

$$y_{x=0} = 0$$

$$y_{x=\frac{\pi}{2}} = \infty.$$

Diese Kurve geht also vom Pol aus und erreicht den Äquator nach unendlich vielen Windungen. Sie schneidet alle Verfolgungskurven mit dem Index 1, deren Poldistanz b der Ungleichung genügt:

$$0 < \sin b < 1 \quad 2 - 1.$$

Mit der Verfolgungskurve $c \quad 2$ trifft diese gerade noch im Unendlichen auf dem Äquator zusammen. Alle Linien, für die $c > 2$, erreichen den Äquator zwar auch im Unendlichen, aber um ein endliches Stück eher. Die soeben betrachtete Kurve hat nach Gestalt und Gleichung Ähnlichkeit mit der durch den Pol gehenden Verfolgungslinie $\frac{m}{n} = 1$.

Außerdem hat sie noch die andere Eigenschaft, die schon bei der allgemeinen Kurve $\frac{m}{n} < 1$ in § 8 erwähnt wurde und an die Verfolgungskurve erinnert. Bezeichnet man nämlich ihren Bogen mit s, so war nach Gleichung [10] im § 8:

$$\frac{y}{s} = \frac{m}{n}, \quad \text{also hier:}$$

[4] $$y = s.$$

Dasselbe Resultat folgt auch aus [2], wenn man bildet:

$$1 + \sin^2 x \left(\frac{d\,y}{d\,x}\right)^2 = \left(\frac{d\,s}{d\,x}\right)^2.$$

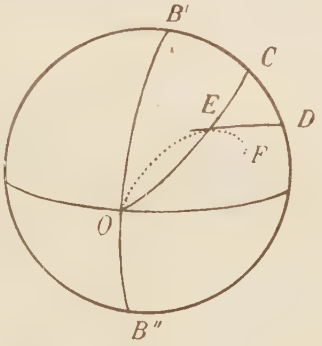
Es sei ED Tangente an die Kurve OEF im Punkte E und $CB' = y$.

Ist dann OEF eine Verfolgungskurve $\frac{m}{n} = 1$, so ist:

$$\widehat{OE} = B'D.$$

Stellt dagegen OEF die soeben diskutierte Kurve dar, so ist:

$$\widehat{OE} = B'C.$$



§ 17.

Rektifikation der Kurven: $\frac{m}{n} = 1$.

Da die Gleichungen in endlicher Form vorliegen, so läßt sich leicht zeigen, daß die beiden Punkte tatsächlich gleiche Strecken zurücklegen. Zu diesem Zwecke braucht nur die Kurve rektifiziert zu werden (s) und zweitens der Abschnitt bestimmt zu werden, den ihre Tangente auf dem Äquator macht (s'), beide müssen gleich sein.

Gleichung [1], § 5 nimmt die Form an:

[1] $$d\,y' = d\,s = \frac{c\,v + 1}{2\,v} \frac{d\,v}{\sqrt{4\,c\,v^2 - (c\,v+1)^2}}.$$

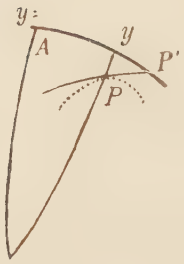
Man behält die Substitution von § 15 bei und integriert von $x = b$ an. Außerdem ist zu berücksichtigen, daß:

$$-\frac{1}{2} \arcsin \frac{2\,z}{1+z^2} = \operatorname{arc\,tg}\, z.$$

$$[2] \quad s = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{c}{4-c}}\log\frac{z\sqrt{c-2-\sqrt{4-c}}\sqrt{c-2+\sqrt{4-c}}}{z\sqrt{c-2+\sqrt{4-c}}\sqrt{c-2-\sqrt{4-c}}}$$

$$-\operatorname{arc\,tg} z + \frac{\pi}{4}.$$

Der Weg des verfolgten Punktes ist AP'. Er ergibt sich als:



$$s' = y + \operatorname{arc\,tg}\left[\frac{dy}{dx}\sin x\cos x\right]$$

$$\frac{dy}{dx}\sin x\cos x = \frac{c\,v-1}{v\sqrt{4-\left(\frac{c\,v-1}{v}\right)^2}}$$

$$= \frac{\sqrt{c}\,(1+z^2)-2z}{1-z^2}\sqrt{c}.$$

y folgt aus Gleichung [2], § 15. Also ist:

$$s' = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{c}{4-c}}\log\frac{z\sqrt{c-2-\sqrt{4-c}}\sqrt{c-2+\sqrt{4-c}}}{z\sqrt{c-2+\sqrt{4-c}}\sqrt{c-2-\sqrt{4-c}}}$$

$$+\operatorname{arc\,tg}\left[z\frac{1+c}{1-c}-\frac{2\sqrt{c}}{1-c}\right]+\operatorname{arc\,tg}\left[\frac{\sqrt{c}\,(1+z^2)-2z}{1-z^2}\right]-\operatorname{arc\,tg}\frac{1-\sqrt{c}}{1+\sqrt{c}}.$$

Es läßt sich noch zusammenziehen:

$$\operatorname{arc\,tg}\left[\frac{\sqrt{c}\,(1+z^2)-2z}{1-z^2}\right]+\operatorname{arc\,tg}\left[z\frac{1+c}{1-c}-\frac{2\sqrt{c}}{1-c}\right]$$

$$= -\operatorname{arc\,tg}\frac{z+\sqrt{c}}{1-z\sqrt{c}} = -\operatorname{arc\,tg} z - \operatorname{arc}\sqrt{c}.$$

Ferner ist:

$$-\left[\operatorname{arc\,tg}\sqrt{c}+\operatorname{arc\,tg}\frac{1-\sqrt{c}}{1+\sqrt{c}}\right] = \operatorname{arc\,tg} 1 = \frac{\pi}{4}.$$

Die Einsetzung dieser Werte zeigt, daß:

$$s = s'.$$

Addiert man in Gleichung [2] noch $\frac{\pi}{2}$, so geht s in y' über, und es ergibt sich wieder die Gleichung der Kurve mit y' als der

abhängigen Variabeln. Diese Gleichung ist etwas einfacher als [2], § 15, sie lautet:

$$[3]\quad y' = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{c}{4-c}}\log\left\{\frac{z\sqrt{c-2}-\sqrt{4-c}\sqrt{c-2}+\sqrt{4-c}}{z\sqrt{c-2}+\sqrt{4-c}\sqrt{c-2}-\sqrt{4-c}}\right\} - \operatorname{arc\,tg} z + \frac{3}{4}\pi.$$

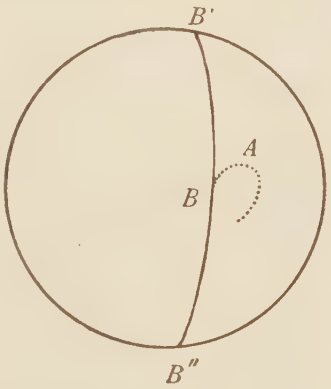
Dasselbe läßt sich ganz analog für $c = 1$ machen, jedoch wird die so erhaltene Gleichung wieder etwas komplizierter als § 15, Gleichung [7] und lautet:

$$[4]\quad y' = \frac{1}{2\sqrt{3}}\log\frac{2}{z\sqrt{3}-1} + \operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{3}-z}{1+z\sqrt{3}} + \frac{\pi}{2}.$$

§ 18.

Dritter Hauptfall: $\frac{m}{n} > 1$.

Auch hier gibt es zwei Arten von Kurven. Die einen haben einen Punkt A, die andern nicht. Aber während früher die Art der Kurven von der Anfangslage B′ oder B″ abhing, ist das hier nicht mehr der Fall. Mit der Anfangslage B′ wie B″ kann sowohl die eine, als auch die andere Gattung entstehen. Auch kann für dieselbe Kurve die Konstante sowohl in der Form c_1 wie c_2 auftreten. Will man die beiden Kurvenarten unterscheiden, so muß man sagen: Im ersten Fall ist $c < 1$, die Kurve kehrt dem Pol die konvexe Seite zu, im zweiten Fall umgekehrt.



Erster Fall: $c < 1$.

Betrachten wir zunächst den ersten Fall. Die Konstante ist:

$$c_{1,2} = \left\{\cos^{\frac{m-n}{n}} b\,(1 \mp \sin b)\right\}^2.$$

Der Forderung, daß $c < 1$ sein soll, genügt nicht nur c_1, sondern auch c_2 in der Nähe von $b = \frac{\pi}{2}$, denn für diesen Wert ist

auch $c_2 = 0$. Zunächst soll c_1, das im ganzen Intervall $0 \ldots \frac{\pi}{2}$ kleiner als 1 ist, der Diskussion zugrunde gelegt werden. Da für $c < 1$ ein Punkt A existiert, so kann gesetzt werden:

$$[1] \qquad c_1 = \left\{\cos^{\frac{m-n}{n}} b\,[1 - \sin b]\right\}^2 = \cos^{2\frac{m}{n}} a.$$

Jetzt muß untersucht werden, wieviel Werte $x = b$ dieser Gleichung genügen. Das ist dieselbe Frage, als wenn umgekehrt b als Funktion von c betrachtet und festgestellt wird, für welche Werte von b der Radikand verschwindet. Das gibt in diesem Fall die Gleichung:

$$[2] \qquad -c^2 w^{2m} + 4 c w^{m+n} - 2 c w^m - 1 = 0.$$

Denn $2m > m + n$.

Diese Gleichung hat entweder zwei oder gar keine positive Wurzeln. Zwischen 0 und 1 liegen entweder gar keine oder beide. Aus [2] folgt:

$$4 c v^{\frac{m+n}{n}} = \left(c v^{\frac{m}{n}} + 1\right)^2$$

$$[3] \qquad 2\sqrt{c}\, v^{\frac{m+n}{2n}} = c v^{\frac{m}{n}} + 1.$$

Rechts kann nur dieser positive Wert in Betracht kommen, denn beide Seiten sind stets positiv. $v^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\cos x}$ ist positiv, weil x nicht größer als $\frac{\pi}{2}$ sein kann, $\sqrt{c}$ auch positiv, wie die spätere Betrachtung zeigt.

Man erweitere Gleichung [3] mit $v^{-\frac{m}{2n} + \frac{n}{2n}}$, dann wird daraus

$$2\sqrt{c}\, v = c v^{\frac{m+n}{2n}} + \frac{1}{v^{\frac{m+n}{2n}}}.$$

Setzt man noch $v^{\frac{1}{2}} = v_1$, so erhält man:

$$[4] \qquad 2\sqrt{c}\, v_1^2 = c v_1^{\frac{m+n}{n}} + \frac{1}{v_1^{\frac{m-n}{n}}}.$$

Die rechte Seite ist gleich der rechten Seite der Gleichung der ebenen Verfolgungskurve. Diese lautet:

$$y = \frac{1}{2}\left\{\frac{n}{c(-m+n)} x^{-\frac{m+n}{n}} - \frac{n c}{m+n} x^{\frac{m+n}{n}}\right\}$$

und kann leicht auf die Form gebracht werden:

[5] $$\frac{m-n}{n} c' 2 y = \frac{m-n}{m+n} c'^2 x^{\frac{m+n}{n}} + \frac{1}{x^{\frac{m-n}{n}}}.$$

Das Geschwindigkeitsverhältnis ist hier auch $\frac{m}{n}$, die Konstante ist c'. Erteilt man dieser einen entsprechenden Wert, so stimmen die rechten Seiten beider Gleichungen in der Tat überein. Setzt man:

$$2\sqrt{c}\, v_1^2 = y,$$

so ergeben sich die Stellen, an denen die Wurzel verschwindet, als Schnittpunkte einer ebenen Verfolgungskurve und einer Parabel. Die Parabel bleibt für alle Geschwindigkeitsverhältnisse dieselbe, während sich die Verfolgungskurve ändert. Außerdem soll noch die Gerade: $y = 2\sqrt{c}\, v$ hinzugenommen und ihre Schnittpunkte mit beiden Kurven untersucht werden.

[6]
$$\begin{cases} \text{a)}\ y = c\, v_1^{\frac{m+n}{n}} + \frac{1}{v_1^{\frac{m-n}{n}}} \\ \text{b)}\ y = 2\sqrt{c}\, v_1^2 \\ \text{c)}\ y = 2\sqrt{c}\, v_1. \end{cases}$$

Aus a) und c) folgt (durch Division):

$$2 = \sqrt{c}\, v_1^{\frac{m}{n}} + \frac{1}{\sqrt{c}} v_1^{-\frac{m}{n}}.$$

Die Wurzel ist:

$$v_1^{\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt{c}}$$

[7] $$v^{\frac{m}{n}} = \frac{1}{c}.$$

a) und c) geben also eine in bezug auf $v_1^{\frac{m}{n}}$ quadratische Gleichung, und die beiden Wurzeln, die die Schnittpunkte angeben würden, fallen zusammen. Also ist c Tangente an a, und zwar für dasjenige v, das einem Punkte A auf der Verfolgungskurve der Kugel entspricht.

Die Kurve a hat ein Minimum bei:

[8] $$v_1^{\frac{2m}{n}} = v^{\frac{m}{n}}_{\min} = \frac{m-n}{m+n} \frac{1}{c}.$$

Dieser Wert ist stets kleiner als der soeben gefundene für den Berührungspunkt der Tangente.

Um die Figur nicht allzu willkürlich zu gestalten, ist angenommen $c = \frac{1}{4}$, $\frac{m}{n} = 2$. Parabel und Gerade bleiben für alle Werte von $\frac{m}{n}$ dieselben, sofern sich c nicht ändert. Der Schnittpunkt C dieser beiden Kurven liegt stets bei $v_1 = 1$. Für alle größeren Werte liegt die Parabel im Winkelraum zwischen der Geraden und der y-Achse. Die Verfolgungskurve tangiert die Gerade stets für ein v_1, das größer als 1 ist. Zwischen diesem v_1 und 1 muß ein Schnittpunkt der Parabel und Verfolgungskurve liegen. Dieser Wert soll sein: $v_{1\,(x = b_1)}$.

Es handelt sich jetzt um den zweiten Schnittpunkt. Je größer $\frac{m}{n}$ wird, um so steiler wird die Kurve a, um so eher schneidet sie die Parabel.

Wenn aber $\frac{m}{n}$ immer kleiner wird, so könnte es zweifelhaft sein, ob sich die beiden Kurven überhaupt noch treffen. Es soll daher die Differenz der beiden Ordinaten untersucht werden [y_a — y, das zur Kurve a gehört, ebenso y_b]:

$$y_a - y_b = c\, v_1^{\frac{m+n}{n}} + \frac{1}{v_1^{\frac{m-n}{n}}} - 2\sqrt{c}\, v_1^2.$$

Wenn man setzt: $\frac{m}{n} = 1 + \varepsilon$

[9] $$y_a - y_b = \sqrt{c}\, v_1^2 \{v_1^{\varepsilon} - 2\sqrt{c}\} + \frac{1}{v_1^{\varepsilon}}.$$

Solange ε nicht Null wird, also der Fall der gleichen Geschwindigkeiten eintritt, kann v so groß gewählt werden, daß die Klammer positiv wird, d. h. aber die Kurve a liegt jetzt auf der anderen Seite der Parabel, hat sie also geschnitten. Aus dieser Betrachtung ergibt sich für die Verfolgungskurve auf der Kugel, daß der größere Wert von v, für den die Kurve einen Punkt B hat $\left(\text{wo } y' - y = \frac{\pi}{2}\right)$, um so näher dem Äquator liegt, je mehr sich $\frac{m}{n}$ der Einheit nähert. Außerdem ist dies v das größte, das für die betreffende Kurve auftreten kann, denn für jedes größere wird die Wurzel imaginär. Die Kurve auf der Kugel nähert sich also von diesem Punkte ab wieder dem Pol. Bei v_a liegt wieder ein Punkt A, von hier ab wird $y' - y$ negativ, was in der Gleichung dadurch zum Ausdruck kommt, daß der Zähler von $\operatorname{tg}(y' - y)$ negativ wird. Nun nimmt v noch weiter ab bis zu dem Werte, welcher in der Figur Seite 46 dem andern Schnittpunkt B_1 entspricht. Kleiner kann v nicht werden, denn sonst bliebe die Wurzel nicht mehr reell. Also nimmt v wieder zu usf. Unendlich kann v nicht werden, der Äquator wird somit nicht erreicht.

Für $c = 1$ fallen die Punkte A, B_1, C zusammen. Je kleiner c, d. h. je näher P dem Äquator in der Anfangslage kommt, um so weiter liegen A und B_1 in unserer Figur auseinander. Die Lage der Punkte B_1, A, B_2 bestimmt also die Lage der entsprechenden Punkte auf der Kugel, charakterisiert somit die entsprechende Verfolgungskurve.

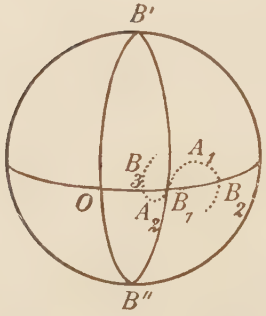
§ 19.

Beziehung zwischen den beiden Konstanten c_1 und c_2.

Es sollen jetzt zwei Kurven mit derselben Anfangslage von P, aber mit den sich um π unterscheidenden Anfangslagen B′ und B″

von P′ betrachtet werden. Für $\frac{m}{n} \leqq 1$ ergaben sich so zwei Arten von Kurven, was dadurch bedingt wurde, daß $c_1 < 1$, $c_2 > 1$ war. Hier erhält man jedoch nur eine Art, denn es wird ja der Fall untersucht, wo auch $c_2 < 1$ ist. Die zur Anfangslage B′ gehörige Kurve sei I, die zu B″ gehörige II. Dann sind die beiden Konstanten:

[1]
$$\begin{cases} \text{I. } c_1 = \left\{\cos^{\frac{m-n}{n}} b_1 \,(1 - \sin b_1)\right\}^2 = \cos^{\frac{2m}{n}} a_1 \\ \text{II. } c_2 = \left\{\cos^{\frac{m-n}{n}} b_1 \,(1 + \sin b_1)\right\}^2 = \cos^{\frac{2m}{n}} a_2. \end{cases}$$



Bezeichnet man den größeren Wert b mit b_2, den kleineren auf Kurve I mit b_3, so ergibt sich ohne weiteres, daß man statt [1] auch schreiben kann [allgemeine Form von c, § 10]:

[2]
$$\begin{cases} \text{I. } c_1 = \left\{\cos^{\frac{m-n}{n}} b_2 \,(1 + \sin b_2)\right\}^2 = \cos^{\frac{2m}{n}} a_1 \\ \text{II. } c_2 = \left\{\cos^{\frac{m-n}{n}} b_3 \,(1 - \sin b_3)\right\}^2 = \cos^{\frac{2m}{n}} a_2. \end{cases}$$

Wenn die Gleichungen [1] und [2] richtig sein sollen, so müssen sich aus ihnen die in der Figur ersichtlichen Größenbeziehungen ergeben. Dividiert man I und II von [1] durcheinander, so folgt:

$$\frac{\cos^{\frac{m}{n}} a_1}{\cos^{\frac{m}{n}} a_2} = \frac{1 - \sin b_1}{1 + \sin b_1}, \quad \text{also:}$$

$$a_1 > a_2.$$

Aus [1], I folgt:

$$\left[\frac{\cos a_1}{\cos b_1}\right]^{\frac{m}{n}} = \frac{1 - \sin b_1}{\cos b_1}, \quad \text{also:}$$

$$a_1 > b_1.$$

Ebenso aus [1], II:

$$\left[\frac{\cos a_2}{\cos b_1}\right]^{\frac{m}{n}} = \frac{1 + \sin b_1}{\cos b_1}, \quad \text{also:}$$

$$a_2 < b_1.$$

Auf Kurve I ist b_1 der kleinste Wert von x, auf II der größte. Man hat daher die Ungleichung:

[3] $$b_2 > a_1 > b_1 > a_2 > b_3.$$

Außerdem ergeben sich noch die drei Gleichungen:

$$\left\{\frac{\cos b_3}{\cos b_1}\right\}^{\frac{m-n}{n}} = \frac{1+\sin b_1}{1-\sin b_3}$$

$$\left\{\frac{\cos b_2}{\cos b_1}\right\}^{\frac{m-n}{n}} = \frac{1-\sin b_1}{1+\sin b_2}$$

$$\cos a_1 \cdot \cos a_2 = \cos^2 b_1.$$

§ 20.

Zweiter Fall: $c > 1$.

Nimmt man die Konstante in der Form:

[1] $$c = \left\{\cos^{\frac{m-n}{n}} b\,(1+\sin b)\right\}^2,$$

so nimmt sie für $b = 0$ den Wert 1 an, für $b = \frac{\pi}{2}$ wird sie Null. In der Nähe von $b = 0$ muß sie größer als 1 werden, denn hier wächst sin b rascher, als cos b abnimmt. c müßte mithin von 1 ansteigen zu einem maximalen Wert und dann abnehmen bis Null. Betrachtet man c als Funktion von b, so nimmt es in der Tat für $0 < b < \frac{\pi}{2}$ einen extremen Wert an, denn die Gleichung:

[2] $$\frac{dc}{db} = 2\cos^{\frac{m}{n}-1} b\,(1+\sin b)\left\{\cos^{\frac{m}{n}} b - \cos^{\frac{m}{n}-2}\left(\frac{m}{n}-1\right)\sin b\,(1+\sin b)\right\} = 0$$

ist erfüllt für:

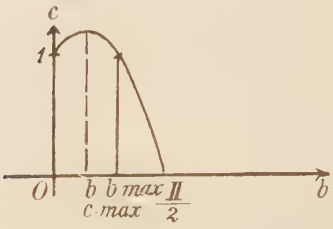
$$b = \frac{\pi}{2}; \quad b = -\frac{3\pi}{2}; \quad b = \arcsin\frac{n}{m}.$$

Nur der dritte Wert kommt in Betracht:

[3] $$\sin b_{c=\max} = \frac{n}{m}$$

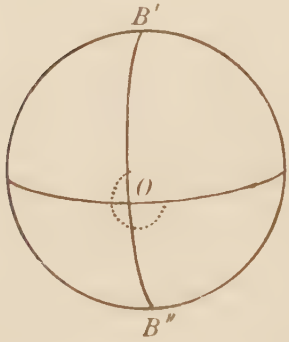
[4] $$c_{\max} = \left\{\frac{m+n}{m}\right\}^2 \left\{\frac{m^2-n^2}{m^2}\right\}^{\frac{m-n}{n}}.$$

$c = f(b)$ hat also den hier gezeichneten Verlauf. Aus 3 folgt, daß $b_{c=max}$ um so kleiner wird, je größer das Geschwindigkeitsverhältnis $\frac{m}{n}$ wird. Von größerem Interesse als $b_{c=max}$ ist jedoch ein anderes b, das mit b_{max} bezeichnet werden soll. In der Nähe von $b = 0$ ist $c > 1$, wenn b zunimmt, so wächst auch c bis zu einem Maximum $[b_{c=max}]$, dann nimmt es ab, wird gleich Eins für b_{max} und schließlich < 1. b_{max} genügt also der Gleichung:



$$[5] \qquad \cos^{\frac{m-n}{n}} b\,(1 + \sin b) = 1,$$

wobei die Wurzel $b = 0$ natürlich nicht in Betracht kommt. b_{max} gehört also zur Polkurve. Für jedes $b > b_{max}$ ist $c < 1$, tritt mithin der schon besprochene Fall I ein. Für $0 < b < b_{max}$ dagegen findet Fall II statt. Die Kurve hat dann die Eigenschaft, daß $y' - y$ nie Null werden kann, denn da c stets größer als 1 ist, so kann der Zähler $c\sqrt[m]{n} - 1$ von $\operatorname{tg}(y' - y)$ nie verschwinden. Das ist aber nur möglich, wenn die Kurve dem Pol stets ihre konkave Seite zukehrt, d. h. ihn einschließt und die gezeichnete Form hat. Die Konstante c kann dann auch nicht wie im Falle I in den beiden Formen geschrieben werden, die sich durch das Vorzeichen von $\sin b$ unterscheiden, je nachdem man b_1 oder b_2 zur Bestimmung von c verwendet, sondern sie ist:



$$[6] \qquad c = \left\{\cos^{\frac{m-n}{n}} b_1\,(1 + \sin b_1)\right\}^2 = \left\{\cos^{\frac{m-n}{n}} b_2\,(1 + \sin b_2)\right\}^2;$$

dabei findet zwischen b_1 und b_2 die Beziehung statt:

$$[7] \qquad \left\{\frac{\cos b_1}{\cos b_2}\right\}^{\frac{m-n}{n}} = \frac{1 + \sin b_2}{1 + \sin b_1}.$$

Jetzt soll noch betrachtet werden, für welches $\frac{m}{n}$ c_{max} einen extremen Wert annimmt, d. h. c_{max} soll als Funktion von $\frac{m}{n}$ angesehen werden. Indem man $\frac{m}{n}$ mit z bezeichnet, läßt sich [4] schreiben:

$$[8] \qquad c_{max} = \left\{1 + \frac{1}{z}\right\}^2 \left\{1 - \frac{1}{z^2}\right\}^{z-1}.$$

Extreme Werte müssen der Gleichung genügen:

$$[9] \qquad \left\{\frac{z+1}{z}\right\}^2 \left\{\frac{z^2-1}{z^2}\right\}^{z-1} \log \frac{z^2-1}{z^2} = 0.$$

Die beiden ersten Faktoren ergeben $z = \pm 1$, das heißt den Fall der gleichen Geschwindigkeiten, für den c_{max} nicht in Betracht kommt. [8] wird für $z = 1$ auch unbestimmt und läßt sich nicht ermitteln. Der dritte Faktor dagegen wird gleich Null nur für

$$z = \infty.$$

[8] wird zwar wegen des zweiten Faktors auch für $z = \infty$ unbestimmt, der wahre Wert dagegen läßt sich ermitteln, er wird (dieser Wert ist ein Minimum):

$$[10] \qquad \text{Min}\,(c_{max}) = 1.$$

$z = \infty$ bedeutet: $\frac{m}{n} = \infty$, der verfolgende Punkt befindet sich in Ruhe, die Kurve besteht aus dem einen Punkt $x = b$, $y = 0$. Die Grenzanfangslage b_{max} und $b_{c=max}$ fallen für $\frac{m}{n} = \infty$ zusammen und werden $b = 0$, denn $c = 1$.

Man kann also noch den Fall, daß sich der verfolgende Punkt in Ruhe befindet, unter den Begriff der Verfolgungskurve fassen und hat, wenn $b = 0$, den Fall II, wenn $b > 0$, den Fall I.

Die Aufsuchung des extremen Wertes von c hat für Fall I ($c < 1$) keinen Sinn. Die der Gleichung [2] entsprechende Gleichung liefert:

$$\sin b_2 = \frac{n}{m}$$

$$\sin b_1 = -\frac{n}{m}.$$

$\sin b_2$ muß aber stets größer sein als $\frac{n}{m}$, denn $\frac{n}{m} = \sin b_{c=max}$, und für $c < 1$ ist $b > b_{max}$ also erst recht $> b_{c=max}$. Im Falle I hat c somit keine extremen Werte.

§ 21.

Spezialfall: $\frac{m}{n} = 2$.

Um auch für $\frac{m}{n} > 1$ bestimmte Werte und eine bestimmte aufzuzeichnende Kurve zu bekommen, soll $\frac{m}{n} = 2$ angenommen werden.

1. $c < 1$. Es folgt aus [1], § 19:

$$c_1 = \{\cos b_1 (1 - \sin b_1)\}^2 = \cos^4 a_1$$
$$c_2 = \{\cos b_2 (1 + \sin b_2)\}^2 = \cos_4 a_2.$$

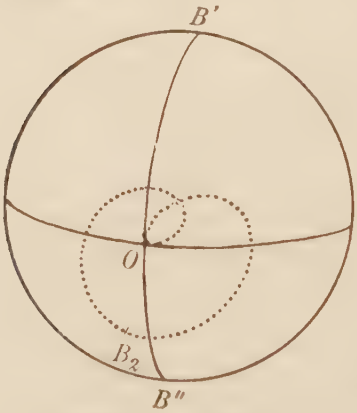
2. $c > 1$. Aus [3], § 20:

$$\sin b_{c=\max} = \frac{1}{b}; \quad b_{c=\max} = 30^0 = \frac{\pi}{6}$$
$$c_{\max} = \frac{27}{16}.$$

3. $c = 1$. Aus [5], § 20:

$$\cos b_2 (1 + \sin b_2) = 1 \quad \text{und daraus:}$$
$$b_2 = 57^0\,10' = 0{,}995.$$

Will man die Kurven konstruieren, so fehlt nur noch eine Angabe über die Länge des entweder von P oder P′ zurückgelegten Weges. Diese Größe ergibt sich aus [8], § 20. Es ist für $m = 2$ und $c = 1$:



Gestalt der Kurve:
$\frac{m}{n} = 2$, $c = 1$.

$$y' = \int_{v=1}^{v=v_{b_2}} v \sqrt{\frac{v^2+1}{4v^3-(v^2+1)^2}}$$

der Weg von P′. Er wurde angenähert berechnet als:

$$y' = 0{,}1 \sum_{1}^{v_{b_2}} v \sqrt{\frac{v^2+1}{4v^3-(v^2+1)^2}}.$$

Dabei ist $v_{b_2} = v_{b=57^0\,10'} = 3{,}4$ (angenähert) $y' = 3{,}3$, also etwas größer als π.

Man erhält daher nebenstehende Figur.

Zusammenstellung der Ergebnisse.

	I. $\frac{m}{n}<1$		II. $\frac{m}{n}=1$		III. $\frac{m}{n}>1$	
A. Größe der Konstanten	1. $c<1$	2. $c>1$	1. $c<1$	2. $c>1$	1. $c<1$	2 $c>1$
B. Form der Konstanten In III, 1 ist b_1 = Abstand d. konv. Bogens, b_2 des konkaven. In III, 2 sind beide Abst. d. konkaven, daher gleichwertig.	$c=\left\{\frac{1-\sin b}{\cos^{1-\frac{m}{n}} b}\right\}^2$ $=\cos^{\frac{2m}{n}} a$	$c=\left\{\frac{1+\sin b}{\cos^{1-\frac{m}{n}} b}\right\}^2$	$c=(1-\sin b)^2$ $=\cos^2 a$	$c=(1+\sin b)^2$	$c=\left\{\cos^{\frac{m}{n}-1} b_1(1-\sin b_1)\right\}^2$ $=\left\{\cos^{\frac{m}{n}-1} b_2(1+\sin b_2)\right\}^2$ $=\cos^{2\frac{m}{n}} a$	$c=\left\{\cos^{\frac{m}{n}-1} b_1(1+\sin b_1)\right\}^2$ $=\left\{\cos^{\frac{m}{n}-1} b_2(1+\sin b_2)\right\}^2$
C. Grenzen der Konstanten 1. $b=0$, die Kurve beginnt im Pol, die Unterfälle werden identisch.	$c=1$ $a=0$	$c=1$	$c=1$ $a=0$	$c=1$	$c=1$ $b_2=b_{max}$ $a=0$	$c=1$ $b_2=b_{max}$
2. $b=\frac{\pi}{2}$, die Kurve fällt mit d. Äquator zusammen.	$c=0$	$c=\infty$	$c=0$	$c=4$	$c=0$ $b_2=\frac{\pi}{2}$	für jedes b, das $>b_{max}$, Fall 1
D. Form der Kurve						
1. Die dem Pol zugekehrte Seite ist:	konvex	konkav	konvex	konkav	konvex	konkav
2. Zahl der Punkte A:	1	0	1	0	1	0
3. „ „ „ B:	1	1	1	1	2	2
4. Die Kurve trifft den Äquator für:	$y=$ endlich	endlich	$y=\infty$	∞	gar nicht	gar nicht

Bemerkung: Für einen Punkt A ist $x=a$, $y'-y=0$. Für einen Punkt B ist $x=b$, $y'-y=\frac{\pi}{2}$.

In der Tabelle ist bei D, 2 und 3 die Anzahl der Punkte A und B gemeint, wenn x einmal alle in dem betreffenden Falle möglichen Werte durchlaufen hat.

Anhang.

Eine Eigentümlichkeit aller durch den Pol gehenden Kurven.

Zum Schluß soll noch ein eigentümlicher Satz erwähnt werden, der für alle durch den Pol gehenden Verfolgungskurven gilt, gleichviel welchen Wert $\frac{m}{n}$ hat.

Setzt man wieder $v^{\frac{1}{n}} = w$, so ist:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{w^n}{\sqrt{w^n - 1}} \cdot \frac{w^m - 1}{\sqrt{4\,w^{m+n} - (w^m + 1)^2}}.$$

Diese Größe hat für $x = 0$ einen bestimmten Grenzwert.

I. Fall: $m < n$.

Das Glied mit dem größten Exponenten ist $4\,w^{m+n}$. Im Zähler wird $w - 1$ ausgeschieden und gegen den im Nenner zweimal abgesonderten Faktor $\sqrt{w - 1}$ gehoben. Es bleibt im Zähler übrig:

$$(w^{m-1} + w^{m-2} + \ldots + 1).$$

Unter der Wurzel im Nenner:

$$(w^{n-1} + \ldots + 1)\{4\,(w^{m+n-1} + w^{m+n-2} \ldots w^{2m} + 3\,(w^{2m-1} \ldots w^m) + w^{m-1} + \ldots 1\}.$$

Läßt man x immer kleiner werden, so ist für $x = 0$, $w = 1$

$$\operatorname{Lim}_{x=0} \frac{dy}{dx} = \frac{m}{\sqrt{n}\sqrt{4\,(n-m) + 3\,m + m}} \quad \frac{m}{2\,n}.$$

II. Fall: $m = n$.

$$\operatorname{Lim}_{x=0} \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} = \frac{m}{2\,n}.$$

III. Fall: $m > n$.

In diesem Falle ist die höchste Potenz von w: w^{2m}. Unter der Wurzel bleibt:

$$-\{w^{2m-1} + w^{2m-2} \ldots w^{m-n}\} + 3\{w^{m+n-1} + \ldots w^{m}\} + w^{m-1} \ldots + 1$$

$$\operatorname{Lim}_{x=0} \frac{dy}{dx} = \frac{m}{2n}.$$

Da nun:

$$\frac{dy'}{dx} = \frac{m}{n}\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \sin^2 x},$$

so ist:

$$\operatorname{Lim}_{x=0} \frac{dy'}{dx} = \frac{m}{n}.$$

Also für alle drei Fälle:

$$\operatorname{Lim}_{x=0} \frac{dy'}{dx} = 2.$$

Der Zuwachs der y für den Pol ist unabhängig vom Geschwindigkeitsverhältnis und halb so groß als der Zuwachs der y'.

Die Verfolgungskurve auf der Pseudosphäre.

Die Gleichung der die pseudosphärische Fläche erzeugenden Kurve ist:

[1] $$\zeta = \int \sqrt{\frac{b^2 - \xi^2}{\xi^2 + r^2 - b^2}}\, d\xi.$$

Wird $b = r$, so trifft die Kurve die ξ-Achse erst im Unendlichen, und die entstehende Rotationsfläche ist die Pseudosphäre; wird $b > r$, so trifft die Kurve die ξ-Achse überhaupt nicht. In diesen beiden Fällen erhält man daher keinen Punkt, der symmetrisch zur Fläche liegt und ähnlich wie der Pol der Kugel als Koordinatenanfangspunkt dienen könnte. Auf einen beliebigen Pol bezogen, werden die Gleichungen äußerst kompliziert. Aus diesem Grunde wird nur der Fall erörtert, daß $b < r$, die Kurve also die ξ-Achse noch im Endlichen trifft. Dieser Schnittpunkt soll auf der entstandenen Fläche als Pol genommen werden. Als Koordinaten werden die Bogen der erzeugenden Linie (x) und die Winkel mit

einem Anfangsmeridian (y) verwendet. Es ist also zunächst ξ als Funktion des Bogens x aufzustellen.

$$dx = \sqrt{1 + \left[\frac{d\zeta}{d\xi}\right]^2}\, d\xi = \frac{r}{\sqrt{\xi^2 + r^2 - b^2}}\, d\xi$$

$$[2] \qquad x = r \log \frac{\xi + \sqrt{\xi^2 + r^2 - b^2}}{\sqrt{r^2 - b^2}},$$

wenn angenommen wird, daß für $x = 0$ auch $\xi = 0$ ist. Aus dieser Gleichung folgt:

$$[3] \qquad \xi = \frac{e^{\frac{x}{r}} - e^{-\frac{x}{r}}}{2} \sqrt{r^2 - b^2}.$$

Die Gleichungen der Fläche in Parameterform lauten mithin:

$$[4] \quad \begin{cases} \xi_1 = \dfrac{e^{\frac{x}{r}} - e^{-\frac{x}{r}}}{2} \sqrt{r^2 - b^2} \sin\left\{\dfrac{y \cdot r}{\sqrt{r^2 - b^2}}\right\} \\ \eta_1 = \dfrac{e^{\frac{x}{r}} - e^{-\frac{x}{r}}}{2} \sqrt{r^2 - b^2} \cos\left\{\dfrac{y \cdot r}{\sqrt{r^2 - b^2}}\right\} \\ \zeta_1 = \dfrac{1}{2r} \int \sqrt{b^2 \left(e^{\frac{x}{r}} + e^{-\frac{x}{r}}\right)^2 - r^2 \left(e^{\frac{x}{r}} - e^{-\frac{x}{r}}\right)^2}\, du + \text{const.} \end{cases}$$

Der Winkel eines Meridians mit dem Anfangsmeridian ist also $v' = \frac{v \cdot r}{\sqrt{r^2 - b^2}}$. Die Konstante in der dritten Gleichung ist der Abstand der Spitze vom ursprünglichen Koordinatensystem. Die Gaußschen Fundamentalgrößen sind:

$$E = 1$$

$$F = 0$$

$$G = \frac{\left(e^{\frac{x}{r}} - e^{-\frac{x}{r}}\right)^2}{4} r^2.$$

Es ist:

$$\operatorname{Lim} \sqrt{G} = 0$$

$$\operatorname{Lim}_{x=0} \frac{d\sqrt{G}}{dx} = \operatorname{Lim}_{x=0} \frac{e^{\frac{x}{r}} + e^{-\frac{x}{r}}}{2} = 1.$$

Also bedeuten die Parameter x und y geodätische Polarkoordinaten. Das Krümmungsmaß ist in diesem Falle:

$$k = \frac{1}{R^2} = -\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{d^2\sqrt{G}}{dx^2} = -\frac{1}{r} \frac{e^{\frac{x}{r}} - e^{-\frac{x}{r}}}{2} \frac{2}{e^{\frac{x}{r}} - e^{-\frac{x}{r}}} \frac{1}{r} = -\frac{1}{r^2}.$$

Also wirklich:

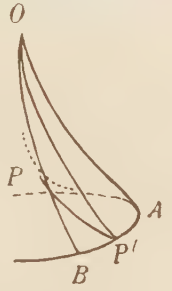
$$R = i\,r.$$

Das Linienelement lautet dann:

$$[5] \qquad ds^2 = dx^2 + G\,dy^2 = dx^2 + r^2 \left[\frac{e^{\frac{x}{r}} - e^{-\frac{x}{r}}}{2}\right]^2 dy^2.$$

Und der Winkel μ, den die geodätische Linie $y = \text{konst.}$ mit einer Kurve bildet, wird bestimmt durch:

$$[6] \qquad \operatorname{tg}\mu = r \frac{e^{\frac{x}{r}} - e^{-\frac{x}{r}}}{2} \frac{dy}{dx} = r \operatorname{Sin} \frac{x}{r} \frac{dy}{dx}.$$



Jetzt kann zum Verfolgungsproblem übergegangen werden. Der verfolgte Punkt sei P' $\left(\text{Koordinaten: } x' = \text{konst.}, \; y' = \frac{r}{\sqrt{r^2 - b^2}}\right)$. Er bewege sich auf einem Kreise, der von O den Abstand C hat, d. h. den pseudosphärischen Abstand C, $OA = OP' = C$. $OP = x$. P und P' werden durch eine geodätische Linie verbunden, diese ist Tangente an die Kurve. $\triangle PBP'$ ist ein rechtwinkliges geodätisches Dreieck. $\sphericalangle BPP' = \mu$.

$$\operatorname{tg}\mu = \frac{\operatorname{tg}\frac{BP'}{ri}}{\sin\frac{BP}{ri}} = \frac{\operatorname{Tg}\frac{BP'}{r}}{\operatorname{Sin}\frac{BP}{r}}.$$

Der Radius eines Parallelkreises ist:

$$\sqrt{r^2 - b^2}\,\operatorname{Sin}\frac{x}{r}.$$

Der Winkel ist:

$$y \frac{r}{\sqrt{r^2 - b^2}}.$$

Also:

$$\operatorname{tg}\mu = \frac{\operatorname{Tg}\left[(y' - y)\operatorname{Sin}\frac{C}{r}\right]}{\operatorname{Sin}\frac{C - x}{r}}.$$

Aus dieser und der Gleichung [6] folgt:

$$[7] \qquad \mathrm{Tg}\left[(y' - y)\,\mathrm{Sin}\,\frac{C}{r}\right] = r\,\mathrm{Sin}\,\frac{x}{r}\,\mathrm{Sin}\,\frac{C-x}{r}\,\frac{dy}{dx}.$$

Differenziert:

$$\frac{dy'}{dx}\,\mathrm{Sin}\,\frac{C}{r} - p\,\mathrm{Sin}\,\frac{C}{r} = \frac{p\left[\mathrm{Cos}\,\frac{x}{r}\,\mathrm{Sin}\,\frac{C-x}{r} - \mathrm{Sin}\,\frac{x}{r}\,\mathrm{Cos}\,\frac{C-x}{r}\right] + r\,\mathrm{Sin}\,\frac{x}{r}\,\mathrm{Sin}\,\frac{C-x}{r}\,\frac{dp}{dx}}{1 - r^2\,\mathrm{Sin}^2\,\frac{x}{r}\,\mathrm{Sin}^2\,\frac{C-x}{r}\,p^2}.$$

Außerdem, wenn das Geschwindigkeitsverhältnis mit m bezeichnet wird:

$$\frac{dy'}{dx}\,r\,\mathrm{Sin}\,\frac{C}{r} = m\sqrt{1 + r^2\,\mathrm{Sin}^2\,\frac{x}{r}\,p^2}.$$

Aus diesen beiden Gleichungen folgt:

$$[8] \qquad \frac{m}{r}\sqrt{1 + r^2\,\mathrm{Sin}^2\,\frac{x}{r}\,p^2} = p\,\mathrm{Sin}\,\frac{C}{r} + \frac{p\,\mathrm{Sin}\left[\frac{C-2x}{r}\right] + r\,\mathrm{Sin}\,\frac{x}{r}\,\mathrm{Sin}\,\frac{C-x}{r}\,\frac{dy}{dx}}{1 - r^2\,\mathrm{Sin}^2\,\frac{x}{r}\,\mathrm{Sin}^2\,\frac{C-x}{r}\,p^2}.$$

Wenn man nun annimmt, der Radius des Kreises, auf dem sich P′ bewegt, sei $\sqrt{r^2 - b^2}$, so ergibt sich aus Gleichung [2], wenn $\xi = \sqrt{r^2 - b^2}$ gesetzt wird:

$$C = r\log(1 + \sqrt{2})$$

$$\mathrm{Sin}\,\frac{C}{r} = 1.$$

Also geht [8] über in:

$$[9] \qquad \frac{m}{r}\sqrt{1 + r^2\,\mathrm{Sin}^2\,\frac{x}{r}\,p^2} = \frac{p\left(\mathrm{Sin}\,\frac{C-2x}{r} + 1\right) + p^2 r^2\,\mathrm{Sin}^2\,\frac{x}{r}\,\mathrm{Sin}^2\,\frac{C-x}{r} + \frac{dp}{dx}\,r\,\mathrm{Sin}\,\frac{x}{r}\,\mathrm{Sin}\,\frac{C-x}{r}}{1 - p^2 r^2\,\mathrm{Sin}^2\,\frac{C}{r}\,\mathrm{Sin}^2\,\frac{C-x}{r}}.$$

Da $\frac{C}{r} = \log(1+\sqrt{2})$, so hängt die Differentialgleichung auf der pseudosphärischen Fläche nicht mehr von b ab, gilt also für alle Flächen mit konstantem negativen Krümmungsmaß.

Zusammenhang zwischen den Gleichungen auf der Kugel und Pseudosphäre.

Damit die Gleichungen unseres Problems auf den beiden Flächen ineinander übergehen, wenn man r mit ir vertauscht, müssen die Gleichungen der Kugel selbst in einer solchen Form gegeben sein, daß schon hier dieser Übergang stattfindet. Die Gleichungen der allgemeinen Fläche mit konstantem positiven Krümmungsmaß seien:

[1]
$$\left\{\begin{aligned} \xi &= \sqrt{r^2 - b^2}\sin\frac{x}{r}\sin\left\{y\frac{r}{\sqrt{r^2-b^2}}\right\} \\ \eta &= \sqrt{r^2 - b^2}\sin\frac{x}{r}\cos\left\{y\frac{r}{\sqrt{r^2-b^2}}\right\} \\ \zeta &= \frac{1}{r}\int\sqrt{b^2\cos^2\frac{x}{r} + r^2\sin^2\frac{x}{r}}\,du + C. \end{aligned}\right.$$

Es können diese allgemeinen Gleichungen zugrunde gelegt werden, da die Geometrie auf allen Flächen mit konstantem positiven Krümmungsmaß identisch ist mit der Geometrie auf der Kugel. Die Gleichungen gehen für $b = 0$ in die der Kugel, für $r = ir$, $b = ib$ in die der pseudosphärischen Fläche über. Es ist:

$$E = 1$$
$$F = 0$$
$$G = r^2\sin^2\frac{x}{r}$$
$$\lim_{x=0}\sqrt{G} = 0; \quad \lim_{x=0}\frac{d\sqrt{G}}{dx} = 1.$$

Also bedeuten x und y wieder geodätische Polarkoordinaten. Somit ist das Bogenelement:

[2]
$$ds^2 = dx^2 + r^2\sin^2\frac{x}{r}dy^2.$$

Und der Winkel zwischen einer Kurve und der geodätischen Linie $y = \text{konst.}$:

$$[3] \qquad \operatorname{tg} \mu = r \sin \frac{x}{r} \frac{dy}{dx}.$$

Bezeichnet man den Abstand des Parallelkreises, auf dem sich P′ bewegt, von O wieder mit C, so ist:

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{\operatorname{tg}\left[(y' - y) \sin \frac{C}{r}\right]}{\sin\left[\frac{C - x}{r}\right]}.$$

Aus den beiden letzten Gleichungen folgt:

$$[4] \qquad r \sin \frac{x}{r} \sin \frac{C - x}{r} p = \operatorname{tg}\left[(y' - y) \sin \frac{C}{r}\right],$$

und hieraus die allgemeine Form der Differentialgleichung:

$$[5] \qquad \frac{p\left\{\cos \frac{x}{r} \sin \frac{C - x}{r} - \sin \frac{x}{r} \cos \frac{C - x}{r}\right\} + r \sin \frac{x}{r} \sin \frac{C - x}{r} \frac{dp}{dx}}{1 + r^2 \sin^2 \frac{x}{r} \sin^2 \frac{C - x}{r} p^2}$$

$$+ p \sin \frac{C}{r} = \frac{m}{r} \sqrt{1 + r^2 \sin^2 \frac{x}{r} p^2}.$$

Aus dieser Gleichung ergibt sich die Differentialgleichung auf der Kugel, wenn man C entsprechend bestimmt, und die Gleichung auf der Pseudosphäre, wenn man $r \cdot i$ statt r setzt und C mit der Konstanten auf der Pseudosphäre vertauscht.

Die Meridiankurve der Fläche mit konstantem positiven Krümmungsmaß hat das Bogenelement:

$$dx = \frac{r\, d\xi}{\sqrt{r^2 - b^2 - \xi^2}}$$

$$x = r \arcsin \frac{\xi}{\sqrt{r^2 - b^2}}.$$

Wenn der Radius des Kreises, auf dem sich P′ bewegt, wieder $= \sqrt{r^2 - b^2}$ gesetzt wird, so folgt:

$$[6] \qquad C = r \arcsin 1 = \frac{r\pi}{2}.$$

Setzt man dies in [5] ein und wählt $r = 1$, so folgt:

$$[7] \quad \frac{2p\cos^2 x + \sin x \cos x \frac{dp}{dx} + p^3 \sin^2 x \cos^2 x}{1 + p^2 \sin^2 x \cos^2 x} = m\sqrt{1 + p^2 \sin^2 x}.$$

Das ist aber die früher für die Kugel abgeleitete Gleichung. Wenn man in [5] überall $r \cdot i$ statt r setzt, folgt:

$$\frac{p\left\{\cos\frac{x}{ri}\sin\frac{C-x}{ri} - \sin\frac{x}{ri}\cos\frac{C-x}{ri}\right\} + ri\sin\frac{x}{ri}\sin\frac{C-x}{ri}}{1 + i^2 r^2 \sin^2\frac{x}{ri}\sin^2\frac{C-x}{ri}p^2}$$

$$+ p\sin\frac{C}{ri} = \frac{m}{ri}\sqrt{1 + r^2 i^2 \sin^2\frac{x}{ri}p^2}.$$

Und wenn man statt der trigonometrischen Funktionen die hyperbolischen einführt, so geht diese Gleichung wieder über in Gleichung [8] auf Seite 58.

Der Grund dafür, daß die Gleichung auf der Pseudosphäre so viel komplizierter ist als die auf der Kugel, liegt darin, daß auf der Kugel $C = \frac{r\pi}{2}$ ist und deshalb $\sin\frac{C-x}{r}$ in $\cos\frac{x}{r}$ übergeht. Dadurch fällt die Konstante C heraus. Hat man aber diese Umformung einmal gemacht, so kann man nicht mehr zur Pseudosphäre zurück. Die beiden Konstanten sind:

$$C = r \arcsin 1 \quad \text{und}$$

$$C' = ri \arcsin\frac{1}{i}.$$

Man sieht, daß man durch bloßes Vertauschen von r mit $r \cdot i$ nicht mehr von C zu C′ gelangen kann.

Zum Schluß sei es mir vergönnt, meinem hochverehrten Lehrer, Herrn Prof. Dr. Gutzmer, dem ich nicht nur die Anregung zu dieser Arbeit, sondern auch manchen wertvollen Wink bei ihrer Ausführung verdanke, nochmals an dieser Stelle meinen ergebensten Dank auszusprechen.

Lebenslauf.

Am 8. November 1881 wurde ich, Ernst Eugen Roeser, evang. Konfession, zu Magdeburg als Sohn des Regierungshauptkassenrendanten Carl Roeser und dessen Ehefrau Luise geb. Rithausen geboren. Zuerst besuchte ich die städtische Bürgerschule zu Halle a. S. und von Ostern 1892 bis 1899 die Oberrealschule der Franckeschen Stiftungen. Von 1899 bis 1901 arbeitete ich praktisch in einer Maschinenfabrik. Am 2. März 1903 bestand ich an der oben genannten Schule die Reifeprüfung und widmete mich dann dem Studium der Mathematik und Physik. Meine ganze Studienzeit brachte ich an der Universität Halle a. S. zu. Am 2. März 1907 bestand ich das Staatsexamen. Im folgenden Jahre genügte ich meiner Militärdienstpflicht in Magdeburg. Von Ostern 1908 bis 1909 war ich in Magdeburg und dann in Calbe a. S. als Kandidat des höheren Lehramts beschäftigt. Das Examen rigorosum bestand ich am 9. Juni 1909.

Teilgenommen habe ich an den Vorlesungen, Seminarien und Übungen der Herren Professoren und Dozenten:

Aschaffenburg, Bernstein, Brückner, G. Cantor, Dorn, Ebbinghaus, Eberhard, Fries, Gutzmer, Riehl, Schenck, Schultze, Strauch, Vaihinger, Wangerin, Wüst.

Aller meiner verehrten Lehrer werde ich mich stets als dankbarer Schüler erinnern.

OSWALD SCHMIDT
LEIPZIG